# Le MRUA

## Solutions des exercices


J. COLAUX

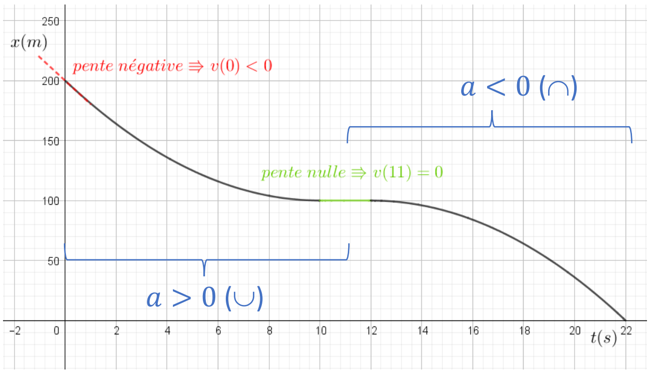
Ce que tu dois **comprendre** et savoir (il ne suffit pas de comprendre, il faut ensuite faire un effort de mémorisation pour pouvoir solliciter ses connaissances, comme si tu étais en cours d'interrogation) **avant** de te lancer dans la résolution des exercices !

Si le mouvement que tu étudies se fait en ligne droite ('rectiligne') et avec une accélération constante ('uniformément accéléré'), càd que la **norme** du vecteur vitesse augmente/diminue toujours de la même valeur ($\triangle$v) durant le même intervalle de temps ($\triangle$t) ; une seconde, par exemple ; alors, il s'agit bien d'un MRUA et tu as le droit d'utiliser les deux relations suivantes[1] :

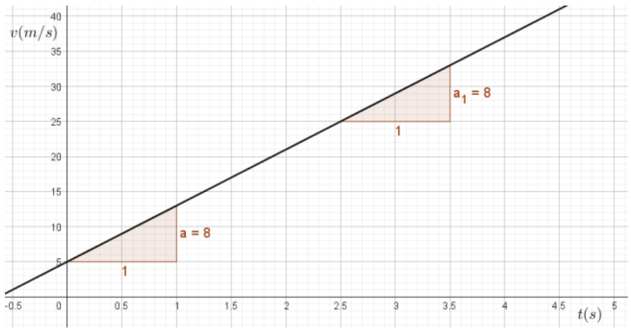
$$x(t) = x(0) + v(0) \cdot t + \frac{at^2}{2}$$

$$v(t) = v(0) + a \cdot t$$

- La première équation est celle qui caractérise l'évolution de la position du mobile au cours du temps (autrement dit, devant quelle graduation du décamètre posé au sol (référentiel) se trouve-t-il. Il s'agit d'une courbe parabolique dont la concavité est tournée vers le haut si l'accélération "$a$" est positive et vers le bas, si elle est négative. Tu dois encore savoir que $v(0)$ représente la vitesse du mobile étudié à l'instant $t = 0$ (quand le MRUA/D commence); elle correspond à la pente de la tangente au graphe x(t), en $t = 0$.



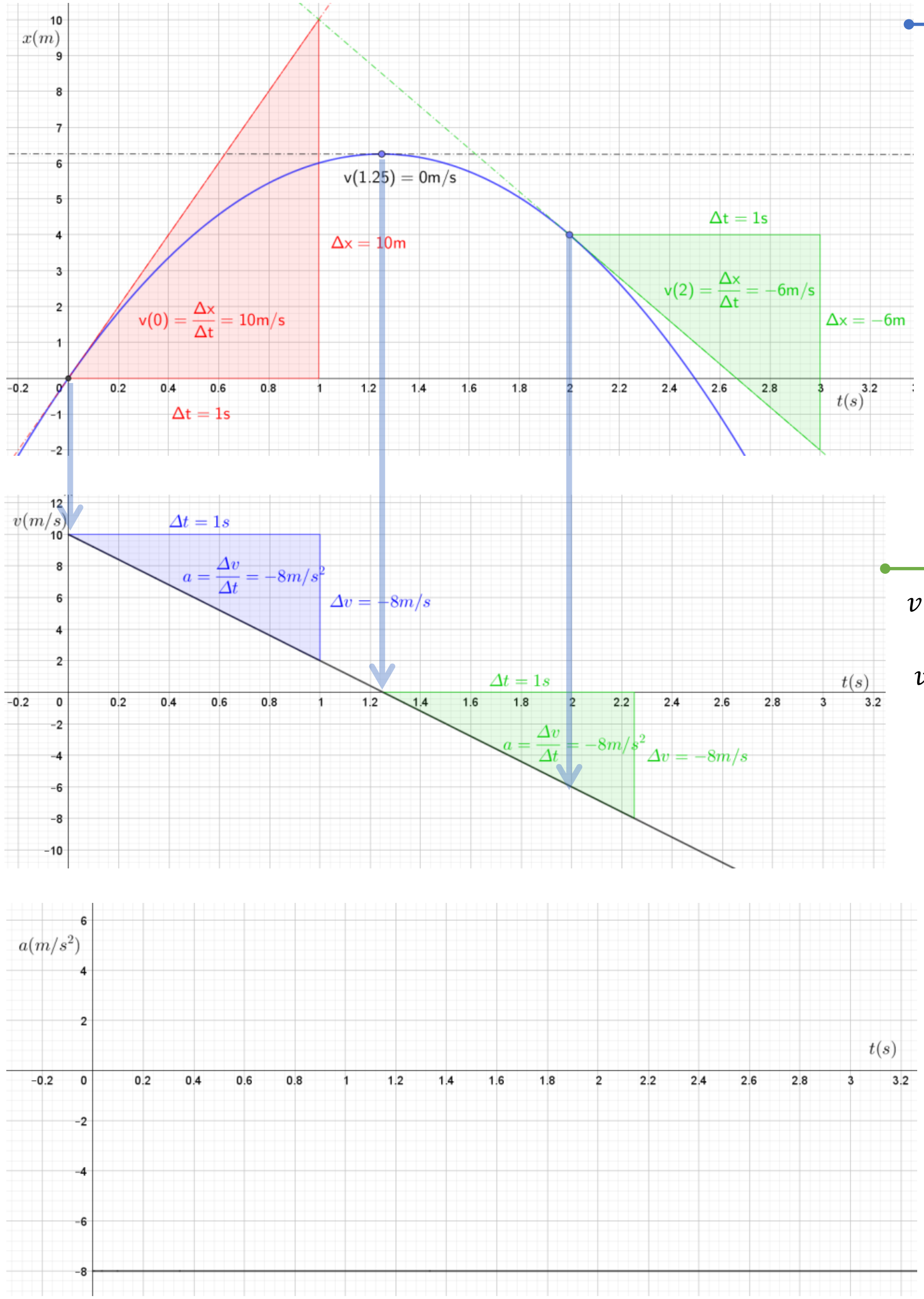

- La seconde équation est celle qui caractérise l'évolution de la vitesse du mobile au cours du temps. Il s'agit d'une droite croissante, si l'accélération (qui est la pente du graphe $v(t)$) est positive) ou décroissante, si l'accélération est négative. Elle peut se calculer n'importe où sur le graphe puisqu'elle est constante.




- Vitesse et accélération, sont deux notions vectorielles ($\vec{v}$ $et$ $\vec{a}$) et tu utilises leurs composantes scalaires ($v$ $et$ $a$) dans les équations ; càd la norme du vecteur à laquelle tu ajoutes un signe ($+$ $ou$ $-$) en fonction du sens de ce vecteur par rapport au référentiel que tu as choisi. Imagine le référentiel $X$, comme étant un immense mètre ruban que tu étales sur le sol et qui te permet de connaitre la position du mobile (la valeur de x) à n'importe quel instant. **Si la vitesse est positive, le mobile se déplace dans le sens du référentiel X. Une vitesse négative est un mobile qui se déplace dans le sens opposé à cet axe X.**

- L'accélération caractérise la variation de vitesse au cours du temps $\left(\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\right)$, une accélération de même signe (et donc de même sens) que la vitesse, représente une accélération au sens commun du terme (la norme de la vitesse augmente, on va de plus en plus vite). Une accélération de signe opposé (et donc de sens opposé) à la vitesse, représente une décélération au sens commun du terme (la norme de la vitesse diminue, on freine).

[1] Dans ce cas-ci, c'est évident, puisque le feuillet ne concerne que le MRUA, mais quand tu seras face à ton examen final, tous les types de mouvements (MRU, MRUA/D, MCU, tir horizontal, tir parabolique) risquent d'être mélangés, il faut donc que tu saches quelles formules tu as le droit d'utiliser à quel moment !




$$x(t) = x(0) + v(0) \cdot t + \frac{at^2}{2}$$

$$x(t) = 0 + 10 \cdot t - \frac{8t^2}{2}$$

En observant la pente de la tangente en un point du graphe $x(t)$, je trouve la valeur $v(t)$ correspondante !

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Exemples : en $t = 0$, $t = 1{,}25$ et $t = 2s$

$$v(t) = v(0) + a \cdot t$$

$$v(t) = 10 - 8 \cdot t$$

$$a(t) = constante$$

$$a(t) = -8$$

En observant la pente en un point du graphe $v(t)$, je trouve la valeur $a(t)$ correspondante !

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

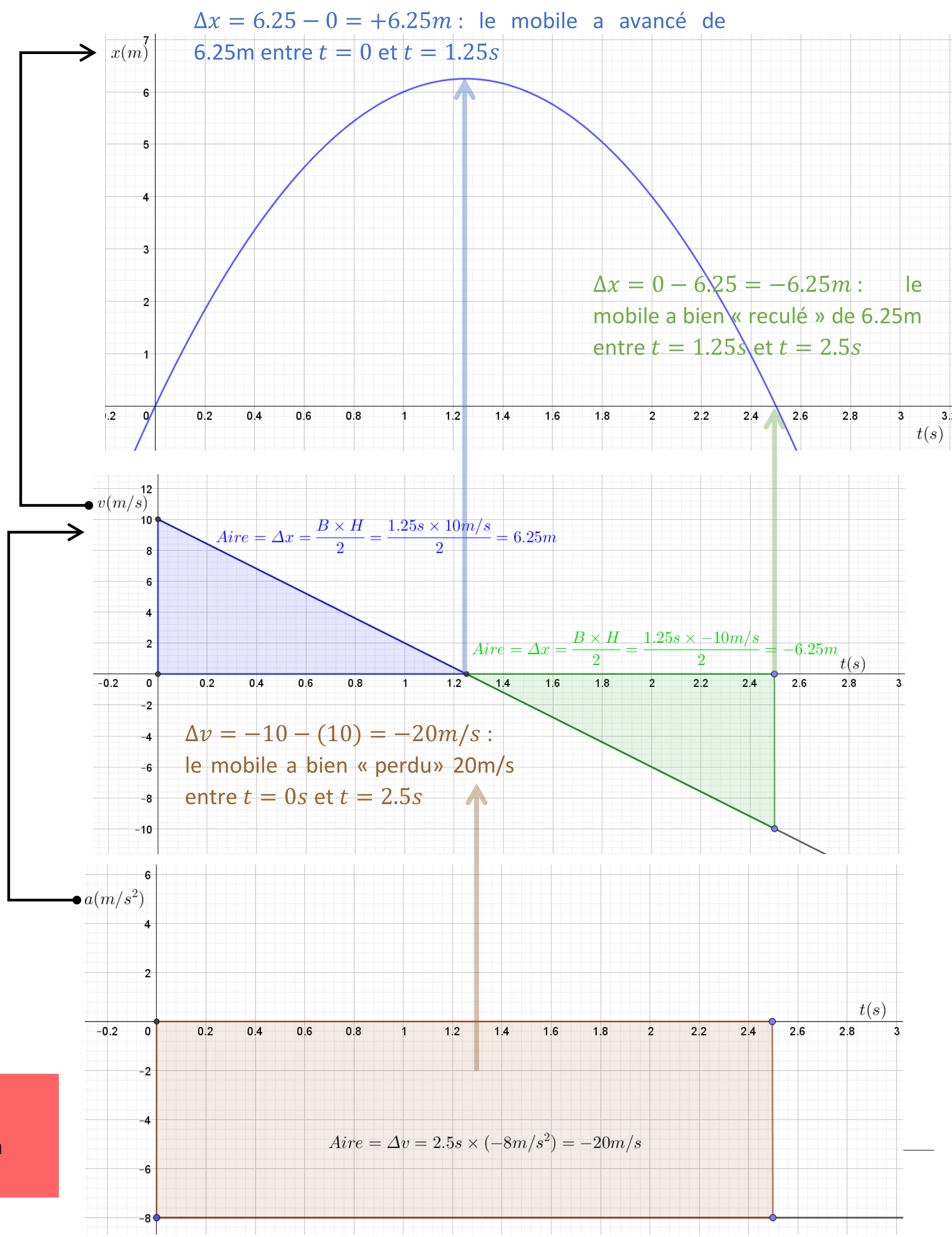
On peut calculer la pente où on veut puisqu'elle est constante ! Exemple en 2 points.

On a trois graphes : $x(t), v(t)\ et\ a(t)$.

Quand on regarde la pente de l'un (càd quand on dérive), on trouve le suivant !

En observant l'aire sous la courbe $v(t)$, je trouve le déplacement $\Delta x$ correspondant (càd la variation de position)!

En observant l'aire sous la courbe $a(t)$, je trouve la variation de vitesse (gain ou perte) $\Delta v$ correspondante !



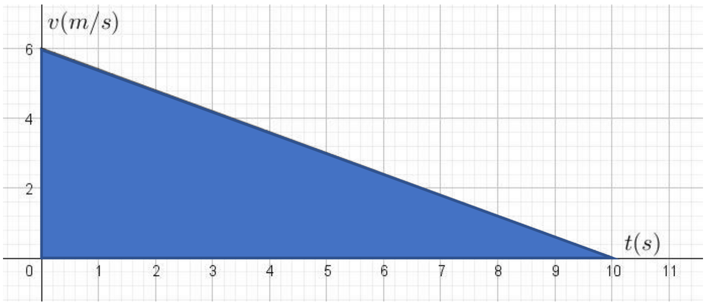

On a trois graphes : $x(t), v(t)$ $et$ $a(t)$.

Quand on regarde l'aire sous la courbe de l'un (càd quand on intègre), on trouve la variation ($\Delta$) du précédent !

1. Soit le graphique de la vitesse en fonction du temps d'un objet en MRUV. A l'instant initial cet objet se trouve à la position $x = 0m$.

*Aire sous la courbe*:

$$\Delta x = \frac{10s \cdot 6m/s}{2} = 30\ m$$




*Pente du graphe*:

$$a = \frac{0-6}{10} = -0{,}6\ m/s^2$$

a) **Le mouvement se fait-il dans le sens du référentiel ? Justifie.** Si c'est le cas, le vecteur vitesse $\vec{v}$ est dans le sens du référentiel et sa composante scalaire, v, est positive. On voit sur le graphique que, bien que la valeur de la vitesse diminue et finit par s'annuler (en $t = 10s$), elle reste positive pendant les 10s du mouvement. La réponse est donc OUI.

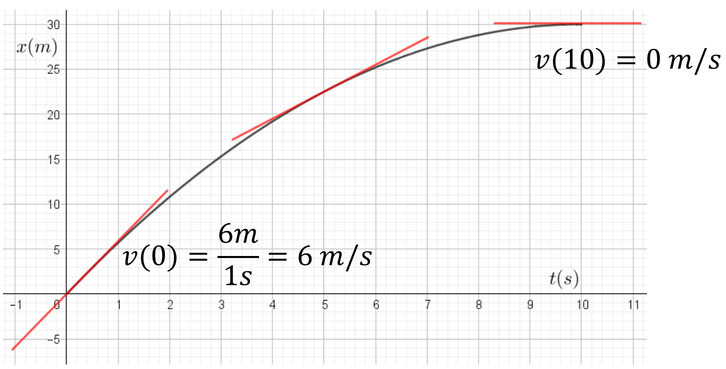
b) **Le mouvement est-il accéléré au sens commun du terme ? Justifie.** Il y a une variation de vitesse et donc, une accélération au sens physique. Etant donné que cette variation est négative (il s'agit d'une droite décroissante), on parlera plutôt de décélération dans le langage courant. $a = -0{,}6m/s^2$, la vitesse diminue de $0{,}6m/s$ chaque seconde.

c) **Donne l'équation horaire de la vitesse.** L'équation théorique est celle de la droite suivante : $v(t) = v(0) + at$. On lit sur le graphique que la valeur de la vitesse en $t = 0$, vaut $v(0) = 6m/s$. On sait que la pente de ce graphique représente l'accélération : $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0-6}{10-0} = -0{,}6\ m/s^2$. On peut donc écrire l'équation horaire de la vitesse : $\boldsymbol{v(t) = 6 - 0,6t}$
Rmq :On peut vérifier cette relation en t=4, par exemple : $v(4) = 6 - 0{,}6 \cdot 4 = 3{,}6\,m/s$: OK !

d) **Donne l'équation horaire de la position.** L'équation théorique est celle de la parabole suivante : $x(t) = x(0) + v(0)t + \frac{at^2}{2}$. L'énoncé nous apprend que $x(0) = 0m$. On sait déjà que $v(0) = 6m/s$ (lecture sur le graphique). On sait également que l'accélération vaut $-0{,}6\ m/s^2$. On peut donc écrire l'équation horaire de la position : $\boldsymbol{x(t)} = 0 + 6t - \frac{0{,}6t^2}{2} = \boldsymbol{6t - 0,3t^2}$.

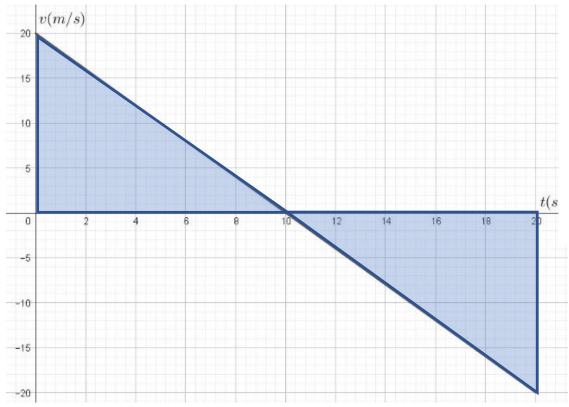
e) **Tracer l'allure du graphique x(t) en le justifiant.** On sait que l'accélération est négative, ce qui correspond à une parabole dont la concavité est tournée vers le bas. On sait encore que $x(0) = 0m$ et que $\Delta x = 30m \Rightarrow x(10) = 0 + 30 = 30m$. On a donc deux points entre lesquels on trace l'allure de la parabole.
Rmq : Si on en a le temps, on peut s'amuser à utiliser l'équation$x(t) = 6t - 0{,}3t^2$ pour calculer certains points de la parabole et la tracer plus précisément.

On observe bien que, sur ce graphe, la pente de la tangente (tracée en rouge), càd la vitesse, est positive et qu'elle diminue progressivement, entre t=0 et t=10s, pour atteindre 0 au sommet de la parabole, càd en t=10s.



2. Soit le graphique de la vitesse en fonction du temps d'un objet en MRUV. A l'instant initial cet objet se trouve à la position $x = 0m$.

$$\Delta x_1 = \frac{10 \cdot 20}{2} = 100m$$




$Pente\ constante\ du\ graphe$:

$$a = \frac{0 - 20}{10 - 0} = -2\ m/s^2$$

$$\Delta x_2 = \frac{10 \cdot (-20)}{2} = -100m$$

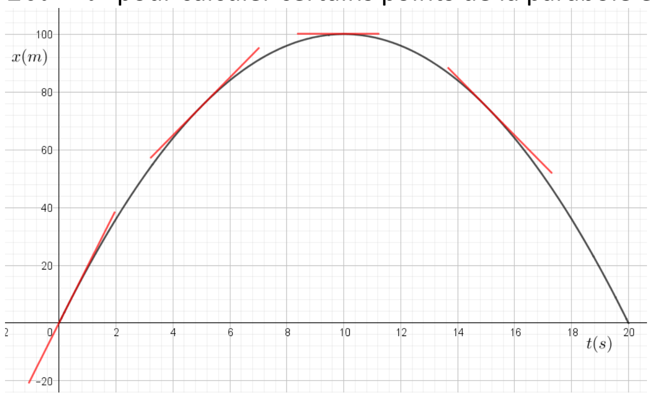
a) **Le mouvement se fait-il dans le sens du référentiel ?** Justifie. Si c'est le cas, le vecteur vitesse $\vec{v}$ est dans le sens du référentiel et sa composante scalaire, v, est positive. On voit sur le graphique que, le mouvement se fait dans le sens du référentiel (càd vers la droite) pendant les 10 premières secondes, puis qu'il se fait vers la gauche pendant les 10 dernières secondes du mouvement, puisque la vitesse devient négative.

b) **Le mouvement est-il accéléré au sens commun du terme ?** Justifie. Il y a une variation de vitesse et donc, une accélération au sens physique. **Rmq :la pente est constante, l'accélération reste donc négative sur l'ensemble du problème (contrairement à la vitesse qui change de signe).** Droite décroissante $\Rightarrow$ a < 0. De 0 à 10s, on a : v > 0 et a < 0 $\Rightarrow$ mouvement décéléré (a opposée à v) vers la droite (v > 0). De 10 à 20s, on a donc : v <0 et a < 0 $\Rightarrow$mouvement accéléré (le vecteur $\vec{a}$ est bien dans le même sens que le vecteur $\vec{v}$)vers la gauche (v<0).

c) **Donne l'équation horaire de la vitesse.** L'équation théorique est celle de la droite suivante $v(t) = v(0) + at$. On lit sur le graphique que la valeur de la vitesse en t =0, vaut v(0)=20m/s. On sait que la pente de ce graphique représente l'accélération : $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0-20}{10-0} = -2\,m/s^2$. On peut donc écrire l'équation horaire de la vitesse : $v(t) = 20 - 2t$.
Rmq :On peut vérifier cette relation en t=10, par exemple : $v(10) = 20 - 2 \cdot 10 = 0\,m/s$ !

d) **Donne l'équation horaire de la position.** L'équation théorique est celle de la parabole suivante : $x(t) = x(0) + v(0)t + \frac{at^2}{2}$. L'énoncé nous apprend que x(0)=0m. On sait déjà que v(0)=20m/s (lecture sur le graphique). On sait également que l'accélération vaut $-2\,m/s^2$. On peut donc écrire l'équation horaire de la position : $x(t) = 0 + 20t - \frac{2t^2}{2} = 20t - t^2$.

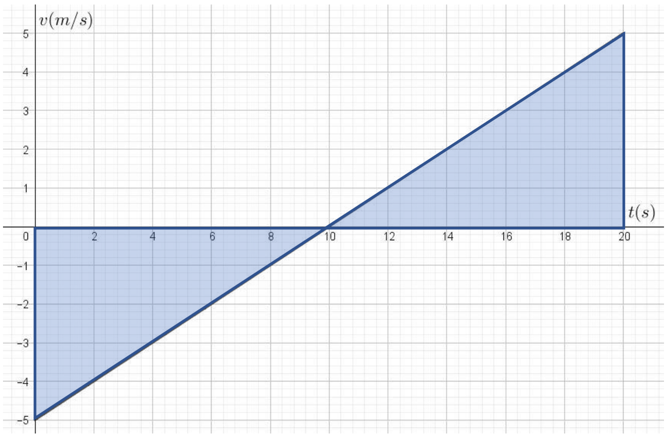
e) **Tracer l'allure du graphique x(t) en le justifiant.** On sait que l'accélération est négative, ce qui correspond à une parabole dont la concavité est tournée vers le bas. On sait encore que $x(0) = 0m$ et que $\Delta x_1 = 100m \Rightarrow x(10) = 0 + 100 = 100m$. On sait aussi que $\Delta x_2 = -100m \Rightarrow x(20) = -100 + 100 = 0m$ On a donc trois points entre lesquels on trace l'allure de la parabole. Rmq : Si on en a le temps, on peut s'amuser à utiliser l'équation$x(t) = 20t - t^2$ pour calculer certains points de la parabole et la tracer plus précisément.




On observe bien que, sur ce graphe, la pente de la tangente (tracée en rouge), càd la vitesse, est positive et qu'elle diminue progressivement, entre t=0 et t=10s, pour atteindre 0 au sommet de la parabole, càd en t=10s. Elle devient ensuite de plus en plus négative (càd de plus en plus grande dans le sens opposé au référentiel).

3. Soit le graphique de la vitesse en fonction du temps d'un objet en MRUV. A l'instant initial cet objet se trouve à la position $x = 40m$.

$$\Delta x_1 = \frac{10 \cdot (-5)}{2} = -25m$$




$$\Delta x_2 = \frac{10 \cdot (+5)}{2} = +25m$$

*Pente constante du graphe*:

$$a = \frac{5-(-5)}{20-0} = 0{,}5\ m/s^2$$

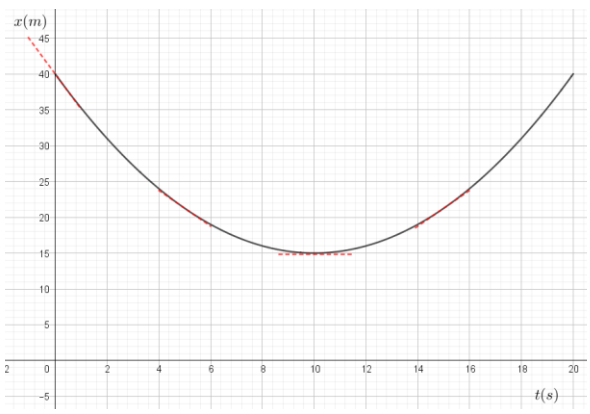
a) **Le mouvement se fait-il dans le sens du référentiel ? Justifie.** On voit sur le graphique que, le mouvement se fait dans le sens opposé au référentiel (càd vers la gauche) pendant les 10 premières secondes (v<0), puis qu'il se fait vers la droite pendant les 10 dernières secondes du mouvement, puisque la vitesse devient positive.

b) **Le mouvement est-il accéléré au sens commun du terme ? Justifie.** Il y a une variation de vitesse et donc, une accélération au sens physique. **Rmq :la pente est constante, l'accélération reste donc positive sur l'ensemble du problème (contrairement à la vitesse qui change de signe).** Droite croissante $\Rightarrow$ a>0. De 0 à 10s, on a : v<0 et a>0 $\Rightarrow$mouvement décéléré vers la gauche. De 10 à 20s, on a donc : v>0 et a>0 $\Rightarrow$mouvement accéléré (le vecteur $\vec{a}$ est bien dans le même sens que le vecteur $\vec{v}$) vers la droite (v>0).

c) **Donne l'équation horaire de la vitesse.** L'équation théorique est celle de la droite suivante $v(t) = v(0) + at$. On lit sur le graphique que la valeur de la vitesse en t =0, vaut v(0)= - 5m/s. On sait que la pente de ce graphique représente l'accélération : $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{5-0}{20-10} = +0{,}5\,m/s^2$. On peut donc écrire l'équation horaire de la vitesse : $v(t) = -5 + 0{,}5t$.
Rmq :On peut vérifier cette relation en t=6s, par exemple : $v(6) = -5 + 0.5 \cdot 6 = -2\,m/s$ !

d) **Donne l'équation horaire de la position.** L'équation théorique est celle de la parabole suivante : $x(t) = x(0) + v(0)t + \frac{at^2}{2}$. L'énoncé nous apprend que x(0)=40m. On sait déjà que v(0)= - 5m/s (lecture sur le graphique). On sait également que l'accélération vaut $+0{,}5\,m/s^2$. On peut donc écrire l'équation horaire de la position : $x(t) = 40 - 5t + \frac{0{,}5t^2}{2} = 40 - 5t + 0{,}25t^2$.

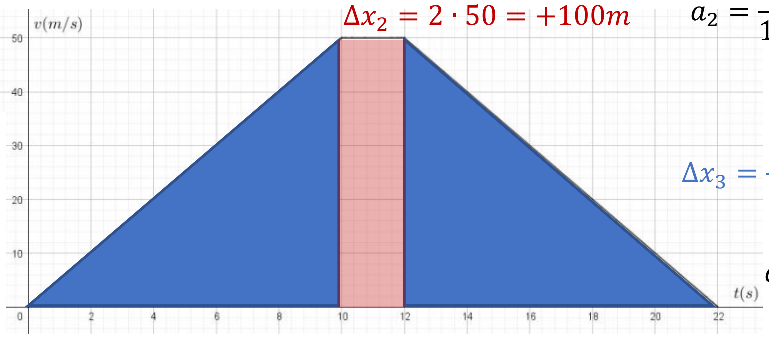
**e) Tracer l'allure du graphique x(t) en le justifiant.** On sait que l'accélération est positive, ce qui correspond à une parabole dont la concavité est tournée vers le haut. On sait encore que $x(0) = 40m$ et que $\Delta x_1 = -25m \Rightarrow x(10) = 40 - 25 = 15m$. On sait aussi que $\Delta x_2 = 25m \Rightarrow x(20) = 15 + 25 = 40m$ On a donc trois points entre lesquels on trace l'allure de la parabole.



4. Soit le graphique de la vitesse en fonction du temps d'un objet en MRUV. A l'instant initial cet objet se trouve à la position $x = -50m$.

$$\Delta x_2 = 2 \cdot 50 = +100m \qquad a_2 = \frac{50-50}{12-10} = 0\ m/s^2$$

$$\Delta x_1 = \frac{10 \cdot (+50)}{2} = +250m$$




$$\Delta x_3 = \frac{10 \cdot (+50)}{2} = +250m$$

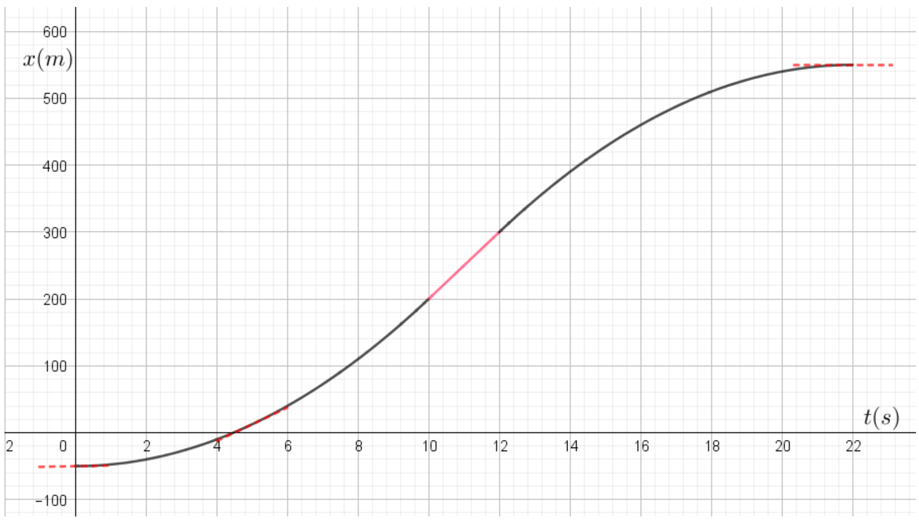
$$a_1 = \frac{50-0}{10-0} = +5\ m/s^2$$

$$a_3 = \frac{0-50}{22-12} = -5\ m/s^2$$

a) **Le mouvement se fait-il dans le sens du référentiel ? Justifie.** On voit sur le graphique que, le mouvement se fait entièrement dans le sens référentiel (càd vers la droite), puisque la vitesse reste positive du début à la fin du mouvement.

b) **Le mouvement est-il accéléré au sens commun du terme ? Justifie.** Il y a une variation de vitesse et donc, une accélération au sens physique. **Rmq : il y a 3 étapes dans ce mouvement :**
**De t=0 à t=10s, la pente est constante et positive $\Rightarrow$ a>0 et v>0 $\Rightarrow$ MRUA vers la droite.**
**De t=10 à t=12s, la pente est nulle $\Rightarrow$ a=0 et v>0 $\Rightarrow$ MRU vers la droite.**
**De t=12 à t=22s, la pente est constante et négative $\Rightarrow$ a<0 et v>0 $\Rightarrow$ MRUD vers la droite** (le vecteur $\vec{a}$ est bien dans le sens opposé à celui du vecteur $\vec{v}$ et vers la droite pcq v>0)**.**

**c) Tracer l'allure du graphique x(t) en le justifiant.**
De t=0 à t=10s, a>0 et v>0 $\Rightarrow$ MRUA vers la droite $\Rightarrow$ morceau de parabole tournée vers le haut (a>0) avec une tangente dont la pente est nulle en t=0 (puisque $v(0) = 0$). La parabole est comprise entre $x(0) = -50$ et $x(10) = x(0) + \Delta x_1 = -50 + 250 = 200m$
De t=10 à t=12s, MRU vers la droite $\Rightarrow$ pente croissante. La droite est comprise entre $x(10) = 200m$ et $x(12) = x(10) + \Delta x_2 = 200 + 100 = 300m$
De t=12 à t=22s, la pente est constante et - $\Rightarrow$ a<0 et v>0 $\Rightarrow$ MRUD vers la droite $\Rightarrow$ morceau de parabole tournée vers le bas avec une tangente dont la pente est positive en t=12 et nulle en t=22s. La parabole est comprise entre $x(12) = 300$ et $x(22) = x(12) + \Delta x_3 = 300 + 250 = 550m$



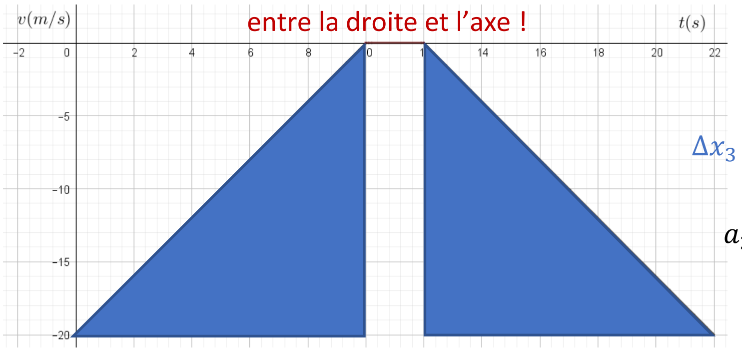

Rmq : dans ce cas, il y a trois types de mouvements (avec 3 accélérations différentes), c'est donc plus compliqué de travailler avec les équations.

5. Soit le graphique de la vitesse en fonction du temps d'un objet en MRUV. A l'instant initial cet objet se trouve à la position $x = 200m$.

$\Delta x_2 = 0 \cdot 2 = 0m$ (la droite étant sur l'axe, il n'y a pas d'aire comprise entre la droite et l'axe !

$$\Delta x_1 = \frac{10 \cdot (-20)}{2} = -100m$$

$$a_1 = \frac{0-(-20)}{10-0} = 2\ m/s^2$$



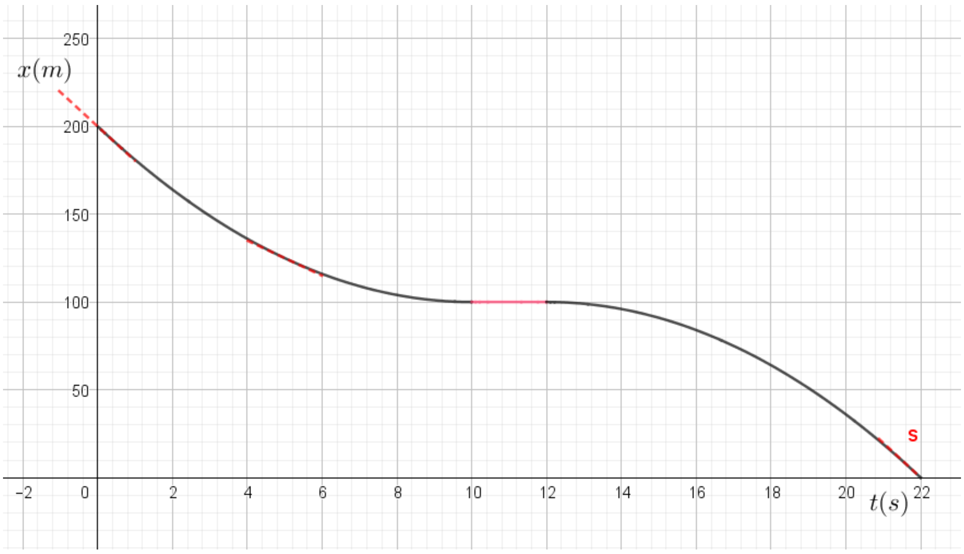

$$\Delta x_3 = \frac{10 \cdot (-20)}{2} = -100m$$

$$a_3 = \frac{-20-0}{22-12} = -2\ m/s^2$$

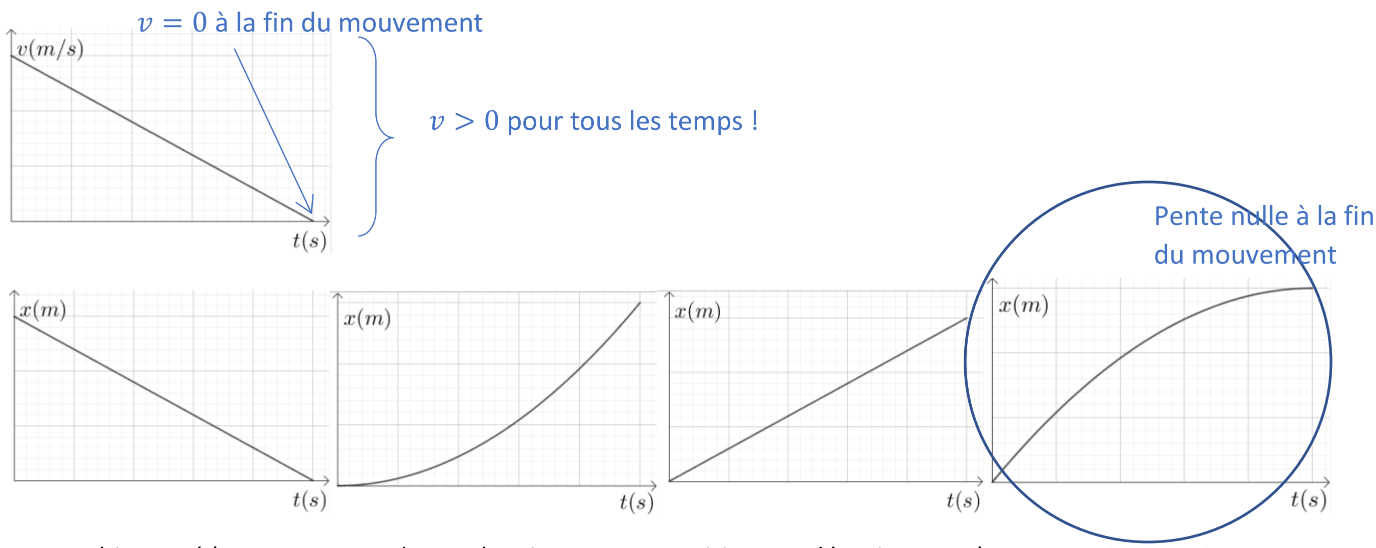
a) **Le mouvement se fait-il dans le sens du référentiel ? Justifie.** On voit sur le graphique que, le mouvement se fait entièrement dans le sens opposé au référentiel (càd vers la gauche), puisque la vitesse reste négative du début à la fin du mouvement.

b) **Le mouvement est-il accéléré au sens commun du terme ? Justifie.** Il y a une variation de vitesse et donc, une accélération au sens physique. **Rmq : il y a 3 étapes dans ce mouvement :**
**De t=0 à t=10s, la pente est constante et >0 ⇒ a>0 et v<0 ⇒ MRUD vers la gauche.**
**De t=10 à t=12s, la pente est nulle ⇒ a=0 et v=0 ⇒ pas de mouvement.**
**De t=12 à t=22s, la pente est constante et <0 ⇒ a<0 et v<0 ⇒ MRUA vers la gauche** (le vecteur $\vec{a}$ est bien dans le même sens que $\vec{v}$ et vers la gauche pcq v<0)**.**

**c) Tracer l'allure du graphique x(t) en le justifiant.**
De t=0 à t=10s, a>0 et v<0 ⇒ MRUD vers la gauche ⇒ morceau de parabole tournée vers le haut (a>0) avec une tangente dont la pente est négative en t=0. La parabole est comprise entre $x(0) = 200$ et $x(10) = x(0) + \Delta x_1 = 200 - 100 = 100m$
De t=10 à t=12s, Repos : $x(10) = x(12) = 100m$
De t=12 à t=22s, la pente est constante et <0 ⇒ a<0 et v<0 ⇒ MRUA vers la gauche ⇒ morceau de parabole tournée vers le bas (a<0) avec une tangente dont la pente est nulle en t=12 et négative en t=22s. La parabole est comprise entre $x(12) = 100$ et $x(22) = x(12) + \Delta x_3 = 100 - 100 = 0\ m$

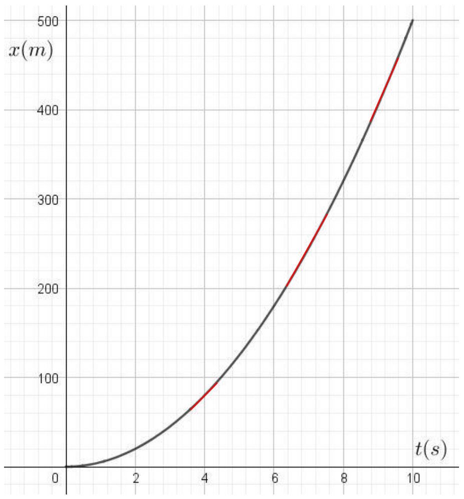


6. A quel graphe x(t) correspond le graphe v(t) ci-dessous ?




Le graphique v(t) nous apprend que la vitesse est positive et décroissante (MRUD v>0 et a<0 constante), le graphe x(t) est donc une parabole dont la concavité est tournée vers le bas (a<0). A la fin du mouvement, la vitesse s'annule, il faut donc que la pente de la tangente à la parabole soit nulle à l'instant final. Ces conditions correspondent au 4$^{ème}$ graphique de x(t).

7. Caractérise chacun des mouvements suivants : position initiale, vitesse initiale et évolution de la vitesse (accélération ou décélération au sens courant du langage).




La tangente au graphe est représentée en rouge pour différents instants.

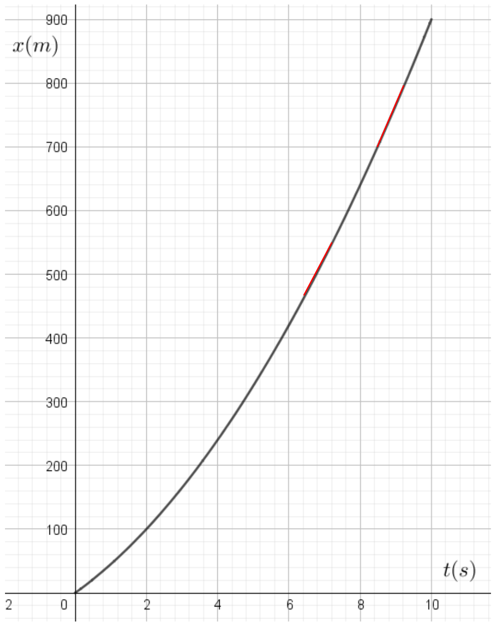
Position initiale : $x(0) = 0$: il suffit de lire la valeur de x en t=0 sur le graphique.

Vitesse initiale : il s'agit de la valeur de la pente de la tangente du graphe $x(t)$ quand $t \to 0$: elle est nulle $\Rightarrow v(0) = 0$

On voit que la pente de la tangente au graphique augmente au cours du temps : il y a donc accélération au sens commun du terme. Etant donné que la vitesse est positive (pente>0 et déplacement dans le sens du référentiel x), l'accélération doit l'être également. Une autre façon de le dire serait de voir que la concavité de la parabole est tournée vers le haut $\Rightarrow a > 0$ et comme la vitesse est positive, il s'agit d'un MRUA.

En effet, la position d'un objet en MRUA est décrite par une parabole dont la fonction est

$x(t) = x(0) + v(0) \cdot t + \frac{at^2}{2}$ . Le coefficient de $t^2$ est $\frac{a}{2}$ dont le signe fixe la concavité de la parabole.

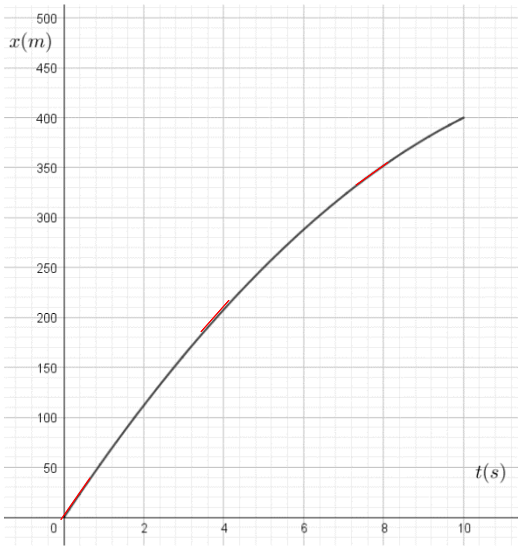



La tangente au graphe est représentée en rouge pour différents instants.

Position initiale : $x(0) = 0$: il suffit de lire la valeur de x en t=0 sur le graphique.

Vitesse initiale : il s'agit de la valeur de la pente de la tangente du graphe $x(t)$ quand $t \to 0$: elle est positive.

On voit que la pente de la tangente au graphique augmente au cours du temps : il y a donc accélération au sens commun du terme. Etant donné que la vitesse est positive (pente>0 et déplacement dans le sens du référentiel x), l'accélération doit l'être également. Ou encore : concavité de la parabole tournée vers le haut $\Rightarrow a > 0$ et comme la vitesse est positive, il s'agit d'un MRUA.




La tangente au graphe est représentée en rouge pour différents instants.

Position initiale : $x(0) = 0$.

Vitesse initiale : pente de la tangente du graphe $x(t)$ quand $t \to 0$:elle est positive.

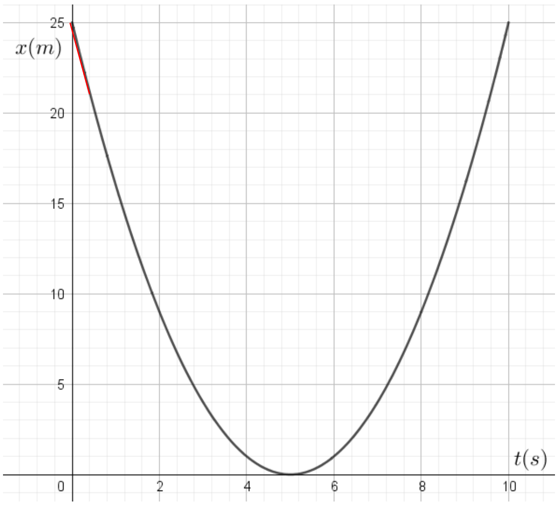
On voit que la pente de la tangente au graphique diminue au cours du temps : il y a donc décélération au sens commun du terme. Etant donné que la vitesse est positive (pente>0 et déplacement dans le sens du référentiel x), l'accélération doit être négative. Ou encore : concavité de la parabole tournée vers le bas $\Rightarrow a < 0$ et comme la vitesse est positive, il s'agit d'un MRUD.


La tangente au graphe est représentée en rouge pour différents instants.

Position initiale : $x(0) = 400m$: lecture graphique.

Vitesse initiale : il s'agit de la valeur de la pente de la tangente du graphe $x(t)$ quand $t \to 0$: elle est négative

On voit que la pente de la tangente au graphique augmente au cours du temps : il y a donc accélération au sens commun du terme. Etant donné que la vitesse est négative (pente<0 et déplacement dans le sens opposé au référentiel x (quand t augmente, x diminue), l'accélération doit l'être également. Ou encore : concavité de la parabole tournée vers le bas $\Rightarrow a < 0$ et comme la vitesse est négative aussi, il s'agit d'un MRUA.




Position initiale : $x(0) = 25m$ (lecture graphique).

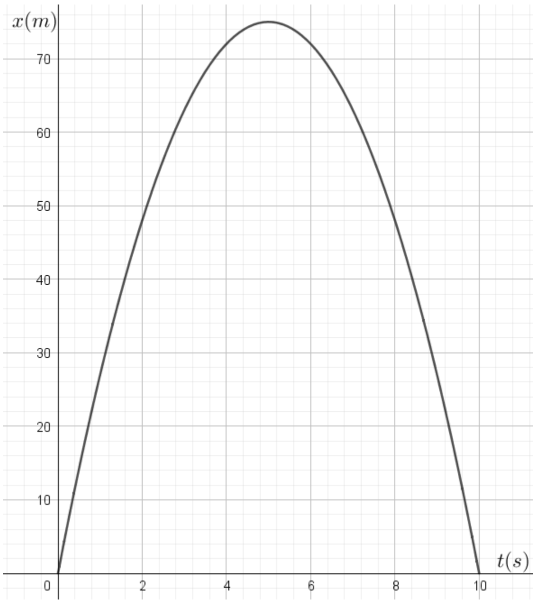
Vitesse initiale : il s'agit de la valeur de la pente de la tangente du graphe $x(t)$ quand $t \to 0$: elle est négative

On voit que la pente de la tangente au graphique est négative et diminue progressivement, s'annule en $t = 5s$, puis devient positive et augmente jusqu'en $t = 10s$.

De $t = 0$ à $t\ = 5s$ : $MRUD$ dans le sens opposé au référentiel : vitesse négative et accélération positive.

En $t\ = 5s$ : $Arrêt$: vitesse nulle.

De $t = 5$ à $t\ = 10s$ : $MRUA$ dans le sens du référentiel : vitesse positive et accélération positive.




Position initiale : $x(0) = 0m$

Vitesse initiale : il s'agit de la valeur de la pente de la tangente du graphe quand $t \to 0$: elle est positive

On voit que la pente de la tangente au graphique est positive et diminue progressivement, s'annule en $t = 5s$, puis devient négative et augmente jusqu'en $t = 10s$.

De $t = 0$ à $t\ = 5s$ : $MRUD$ dans le sens du référentiel : vitesse positive et accélération négative.

En $t\ = 5s$ : $Arrêt$: vitesse nulle.

De $t = 5$ à $t\ = 10s$ : $MRUA$ dans le sens opposé au référentiel : vitesse négative et accélération négative.

En réalité, les six graphiques que vous venez de caractériser correspondent aux équations suivantes. Est-ce cohérent avec ce que vous venez d'expliquer ? On peut répondre à cette question en comparant les équations données à l'équation théorique de la parabole qui caractérise un MRUV :

$$x(t) = x(0) + v(0)t + \frac{at^2}{2}$$

a) $x(t) = 5t^2$

Pas de terme indépendant : $x(0) = 0m \Rightarrow OK$

Pas de terme en t : $v(0) = 0\,m/s \Rightarrow OK$

Le terme qui multiplie $t^2$ est la moitié de l'accélération : $\frac{a}{2} = 5 \ \Rightarrow a = 10\,m/s^2 \Rightarrow OK$, elle est bien positive.

b) $x(t) = 40t + 5t^2$

Pas de terme indépendant : $x(0) = 0m \Rightarrow OK$

Le terme qui multiplie t est la vitesse initiale : $v(0) = 40\,m/s \Rightarrow OK$, elle est bien positive

Le terme qui multiplie $t^2$ est la moitié de l'accélération : $\frac{a}{2} = 5 \ \Rightarrow a = 10\,m/s^2 \Rightarrow OK$, elle est bien positive.

c) $x(t) = 60t - 2t^2$

Pas de terme indépendant : $x(0) = 0m \Rightarrow OK$

Le terme qui multiplie t est la vitesse initiale : $v(0) = 60\,m/s \Rightarrow OK$, elle est bien positive

Le terme qui multiplie $t^2$ est la moitié de l'accélération : $\frac{a}{2} = -2 \ \Rightarrow a = -4\,m/s^2 \Rightarrow OK$, elle est bien négative.

d) $x(t) = 400 - 20t - 2t^2$

Terme indépendant : $x(0) = 400m \Rightarrow OK$

Vitesse initiale : $v(0) = -20\,m/s \ \Rightarrow OK$, elle est bien négative

$\frac{a}{2} = -2 \ \Rightarrow a = -4\,m/s^2 \Rightarrow OK$, elle est bien négative.

e) $x(t) = 25 - 10t + t^2$

Terme indépendant : $x(0) = 25m \Rightarrow OK$

Vitesse initiale : $v(0) = -10\,m/s \ \Rightarrow OK$, elle est bien négative

$\frac{a}{2} = 1 \ \Rightarrow a = 2\,m/s^2 OK$, elle est bien positive.

f) $x(t) = 30t - 3t^2$

Pas de terme indépendant : $x(0) = 0m \Rightarrow OK$

Vitesse initiale : $v(0) = 30\,m/s \ \Rightarrow OK$, elle est bien positive

$\frac{a}{2} = -3 \ \Rightarrow a = -6\,m/s^2 \Rightarrow OK$, elle est bien négative.

8. Un chariot démarre suivant un MRUA. Son accélération vaut 2 m/s² = a.

On choisit $t = 0$ quand le chariot démarre.

⇒ Le terme démarre sous-entend que la vitesse initiale est nulle : $v(0) = 0$

a) Tracez le graphique donnant sa vitesse pendant les 5 premières secondes de son mouvement.

L'équation de la vitesse d'un MRUV est : $v(t) = v(0) + at = 0 + 2t$. Il suffit de remplacer t par plusieurs valeurs. On doit tracer une droite croissante (a>0), il suffit donc de 2 points :

$$v(0) = 0 + 2 \cdot 0 = 0\,m/s$$

$$v(3) = 0 + 2 \cdot 3 = 6\,m/s$$

b) Calculez les distances parcourues après 2 et 5 secondes.

L'équation de la position d'un MRUV est : $x(t) = x(0) + v(0)t + \frac{at^2}{2}$

$= 0 + 0 \cdot t + \frac{2t^2}{2} = t^2$.

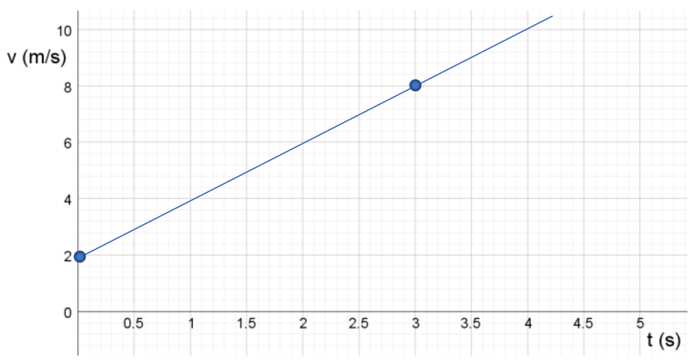
Après 2s, la position est $x(2) = 2^2 = 4m$. Etant donné que la vitesse est toujours positive, il n'y a pas de déplacement dans le sens opposé du référentiel et la position correspond donc à la distance réellement parcourue. Idem pour la distance parcourue après 5s : $x(5) = 5^2 = 25m$

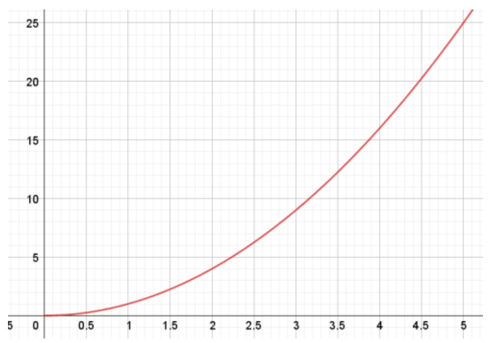
c) Tracez le graphique de l'évolution de la position du chariot pendant les 5 premières secondes du mouvement.

On sait que l'équation de la position de ce mouvement est : $x(t) = t^2$. Il suffit de remplacer t par plusieurs valeurs. On doit tracer une parabole dont la concavité est tournée vers le haut ($a > 0$), nous avons besoin de quelques points :

$x(0) = 0^2 = 0m$ $\quad$ $x(1) = 1^2 = 1m$ $\quad$ $x(2) = 2^2 = 4m$

$x(3) = 3^2 = 9m$ $\quad$ $x(4) = 4^2 = 16m$ $\quad$ $x(5) = 5^2 = 25m$

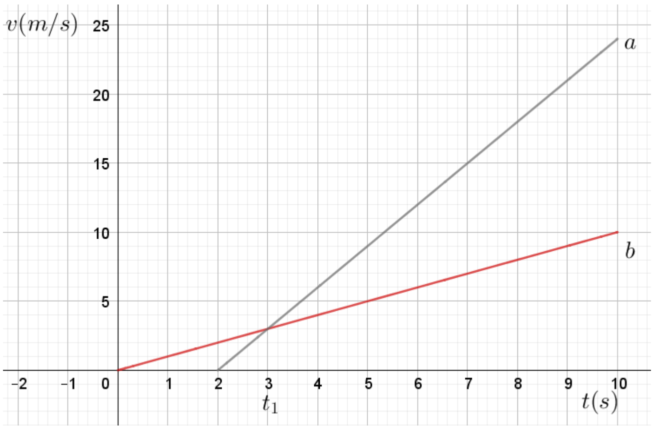


9. Deux voitures démarrent du même endroit et roulent sur une même route rectiligne.

   a) Quelle est celle qui a la plus grande accélération ? Justifie.

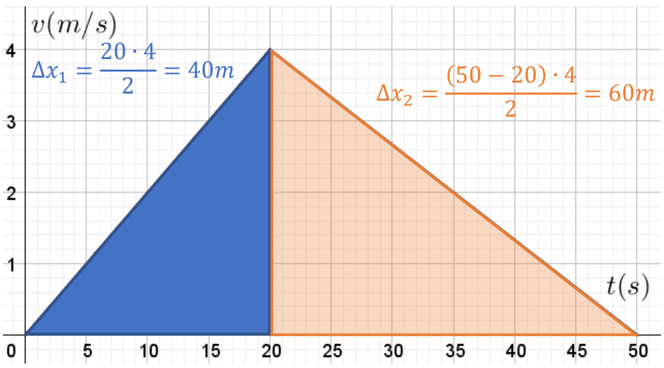
   b) Que se passe-t-il à l'instant $t_1$




On nous donne le graphe v(t), la pente de ce graphique (qui est constante) représente l'accélération $\left(a = \frac{\Delta v}{\Delta t}\right)$. L'accélération est en effet obtenue en dérivant la vitesse (pour ceux qui savent déjà dériver). On voit de suite que la pente 'a' est plus forte que 'b'.

A l'instant $t_1$, il ne se passe pas grand-chose, sinon que le compteur vitesse des deux voitures indique la même valeur : les deux voitures roulent, pour un instant, à la même vitesse bien que les deux voitures ne soient pas à la même position, contrairement à ce qu'on pourrait croire, $x_a(t_1) \neq x_b(t_1)$.

10. Le graphique suivant représente 50 secondes du mouvement d'un mobile. Quelle distance a-t-il parcourue au bout des 50 secondes ?




On nous donne un graphique de v(t), le déplacement $\Delta x$ est donné par l'aire comprise sous la courbe. En effet, le déplacement s'obtient en intégrant la vitesse (pour ceux qui savent déjà intégrer et qui comprendront alors que, étant donné qu'on intègre toujours à une constante près, on ne trouve pas x(0) et x(t) par intégration mais seulement $\Delta x = x(t) - x(0)$).

Cherchons les aires sous les courbes : $\Delta x_{tot} = 40 + 60 = 100m$

Le mobile parcourt 100m dans le sens du référentiel (puisque $v > 0$) : 40m en accélérant, puis 60m en freinant.

11. Pour pouvoir décoller, un petit avion doit atteindre 144 km/h. Que doit valoir l'accélération constante nécessaire à son décollage sur une piste de 300m ? Quelle est la durée de la phase d'élan ?

L'énoncé nous apprend que la vitesse après un temps t d'accélération (càd v(t)), doit valoir 144km/h.

**ATTENTION** : à cause de l'accélération dont l'unité est toujours le m/s², nous sommes obligés de travailler en m/s dans les cas de MRUV (contrairement aux cas de MRU pour lesquels on a le choix entre le km/h et le m/s). Je vois très (trop) souvent des erreurs dans les conversions de vitesses. Il suffit d'écrire 5 fois dans sa vie le raisonnement suivant, puis la conversion est ancrée une bonne fois pour toutes !

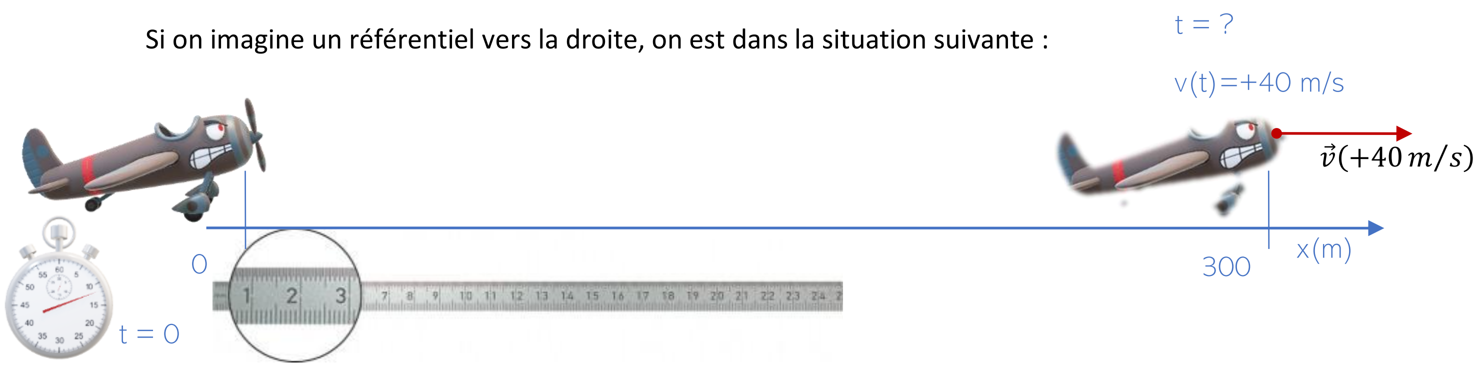
$$144\frac{km}{h} = \frac{144km}{1h} = \frac{144000m}{3600s} = \frac{144m}{3{,}6s} = 40\,m/s$$

Si $t = 0$ est l'instant du démarrage et $t$, l'instant du décollage (càd celui auquel $v = 144km/h$), on a : $v(t) = 40\,m/s$. L'énoncé sous-entend que la vitesse initiale est nulle (l'avion démarre en début de piste) : $v(0) = 0\,m/s$. On nous parle d'une accélération constante et d'une trajectoire en ligne droite, nous sommes donc bien dans un cas de MRUA pour lequel on peut utiliser les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} x(t) = x(0) + v(0) \cdot t + \dfrac{a \cdot t^2}{2} \\ v(t) = v(0) + a \cdot t \end{cases}$$

- ✓ La première équation est donc celle de la parabole qui décrit l'évolution de la position, le long d'un référentiel X, au cours du temps.
- ✓ La seconde est celle de la droite qui caractérise l'évolution de la vitesse au cours du temps. Elle est bien entendu équivalente à : $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

Si on imagine un référentiel vers la droite, on est dans la situation suivante :




Je profite de ce premier exercice algébrique, pour vous rappeler qu'un référentiel est simplement un axe gradué le long duquel on repère un mobile en mouvement + un chrono qui mesure le temps !

On enclenche le chrono $(t = 0)$ quand le MRUA commence. C'est un mouvement dans le sens du référentiel, donc la vitesse est positive. Par ailleurs, le mouvement est accéléré au sens commun du terme, donc il faut que l'accélération soit positive également.

Si on observe le point de départ, à l'instant t=0 :
t = 0
v(0)= 0 m/s
x(0)= 0 m

Si on observe le bout de piste, à l'instant t :
t = ?
v(t)= +40 m/s
x(t)= 300 m

On peut compléter les deux équations du mouvement :

$$\begin{cases} 300 = 0 + 0 \cdot t + \dfrac{a \cdot t^2}{2} \\ +40 = 0 + a \cdot t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 300 = \dfrac{a \cdot t^2}{2} \\ +40 = a \cdot t \end{cases}$$

On obtient un système de deux équations à deux inconnues : a et t.

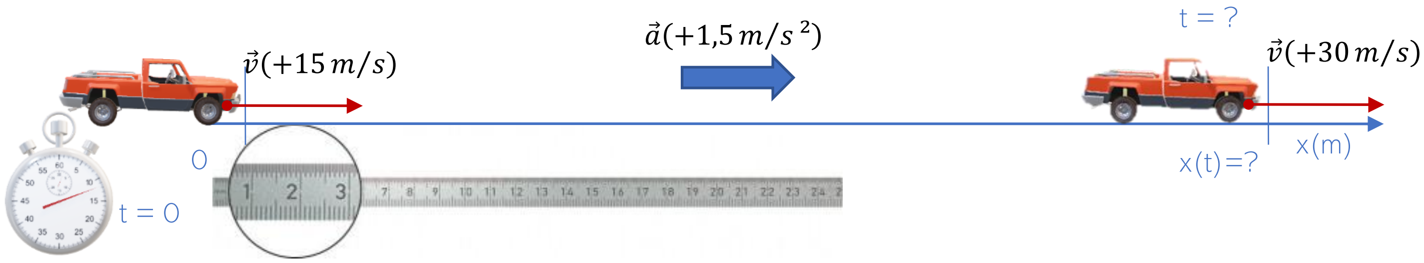
Si on remarque que le terme $\frac{a \cdot t^2}{2}$ est équivalent au terme $\frac{at \cdot t}{2}$, on peut écrire :

$$\begin{cases} 300 = \dfrac{at \cdot t}{2} \\ 40 = at \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 300 = \dfrac{40 \cdot t}{2} \\ 40 = at \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{300 \cdot 2}{40} = t \\ 40 = at \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{t = 15s} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 15s \\ \dfrac{40}{t} = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 15s \\ \boldsymbol{a = \dfrac{40}{15} = 2,7\,m/s^2} \end{cases}$$

**La phase d'élan dure donc 15s et l'accélération, considérée constante est de 2,7m/s².**

12. Une voiture aborde la bande de lancement d'une autoroute à 54 km/h (=15m/s). Son conducteur accélère (a = 1,5 m/s²) pour atteindre une vitesse suffisante avant de s'insérer dans le trafic. Combien de temps lui faudra-t-il pour atteindre 108 km/h (=30m/s) ?

Si on imagine un référentiel vers la droite, on est dans la situation suivante :




On enclenche le chrono $(t = 0)$ quand le MRUA commence. C'est un mouvement dans le sens du référentiel, donc la vitesse est positive. Par ailleurs, le mouvement est accéléré au sens commun du terme, donc il faut que l'accélération soit positive également.

Si on observe le point de départ, à l'instant t=0 :
t = 0
v(0)= +15 m/s
x(0)= 0 m

Si on observe le moment d'insertion dans le trafic, à l'instant t :
t = ?
v(t)= +30 m/s
x(t)= ?

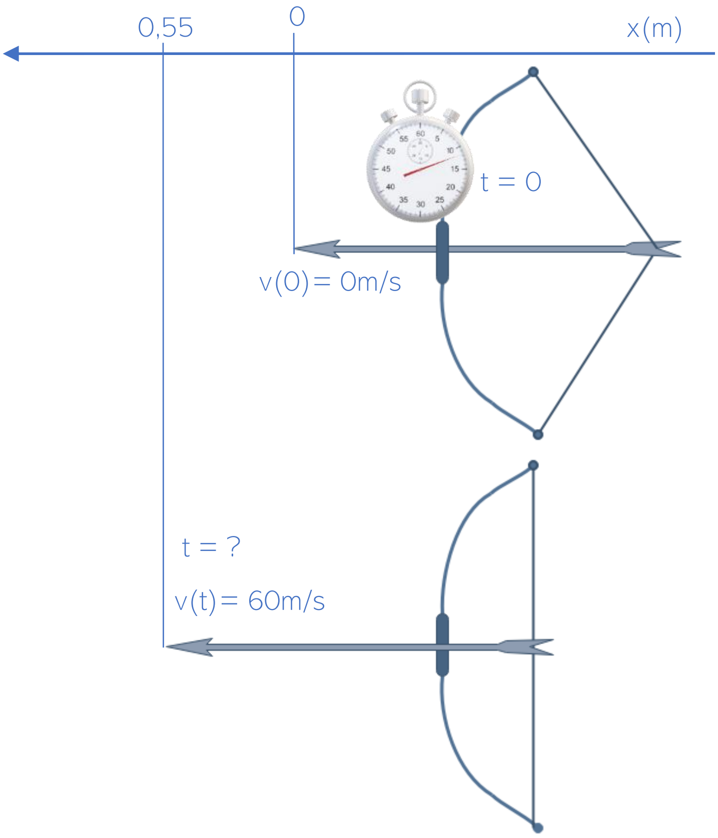
On complète les deux équations du mouvement (MRUA) :

$$\begin{cases} x(t) = 0 + 15 \cdot t + \dfrac{1{,}5 \cdot t^2}{2} \\ 30 = 15 + 1{,}5 \cdot t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = 15 \cdot t + \dfrac{1{,}5 \cdot t^2}{2} \\ \dfrac{30 - 15}{1{,}5} = 10 = t \end{cases}$$

L'équation de la vitesse peut être résolue de suite, on trouve que le temps d'accélération est de 10 secondes. L'équation horaire de la position (x(t)) ; nous permettrait de trouver la distance qui a été nécessaire à atteindre la vitesse d'insertion, mais elle n'est pas demandée.

13. Calculez les accélérations moyennes pour les mobiles suivants :

a) une flèche qui parcourt une distance de 55 cm avant de rompre le contact avec la corde qui la propulse, sachant que dans le même temps, sa vitesse augmente de 0 à 60 m/s ;




La distance parcourue par la flèche pendant son accélération est donc $\Delta x = 55cm = 0{,}55m$. N'oubliez pas que les m/s² de l'accélération nous imposent de travailler avec des m et des s !

| Si on observe le point de départ, à l'instant t=0 : | Si on observe l'instant t auquel la flèche quitte la corde de l'arc: |
|---|---|
| t = 0<br>v(0)= 0 m/s<br>x(0)= 0 m | t = ?<br>v(t)= +60 m/s (on a pris un référentiel vers la gauche, le vecteur vitesse est également vers la gauche, donc de signe +)<br>x(t)= 0,55m |

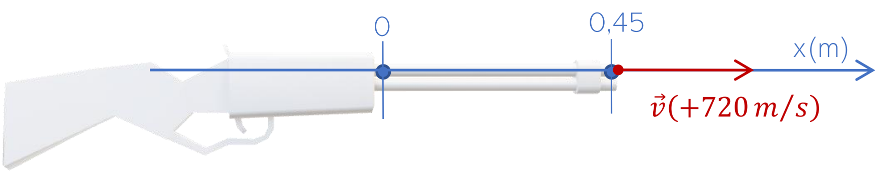
On complète les deux équations du mouvement (MRUA) :

$$\begin{cases} 0{,}55 = 0 + 0 \cdot t + \dfrac{a \cdot t^2}{2} \\ 60 = 0 + a \cdot t \end{cases}$$

On retrouve un système de deux équations à deux inconnues que l'exercice n°11 vous a appris à résoudre.

$$\begin{cases} 0{,}55 = \dfrac{a \cdot t^2}{2} \\ 60 = a \cdot t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}55 = \dfrac{60t}{2} \\ 60 = a \cdot t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{2 \cdot 0{,}55}{60} = 0{,}018s \\ 60 = a \cdot t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{t = 0{,}018s} \\ \boldsymbol{a} = \dfrac{60}{0{,}018} = \boldsymbol{3{,}3.10^3\, m/s^2} \end{cases}$$

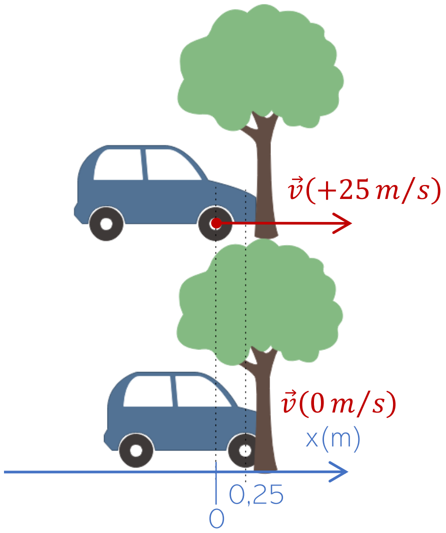
b) une balle de fusil chassée par le gaz qui se détend dans un canon de 45 cm, sachant que la balle quitte le canon à une vitesse de 720 m/s ;




Il s'agit bien d'un MRUA, avec la vitesse et l'accélération dans le même sens, donc toutes deux positives. L'exercice est similaire au précédent (attention aux distances à transformer en m !) :

$$\begin{cases} 0{,}45 = \dfrac{a \cdot t^2}{2} \\ 720 = a \cdot t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}45 = \dfrac{720t}{2} \\ 720 = a \cdot t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{2 \cdot 0{,}45}{720} = \dfrac{1}{800}s \\ 720 = a \cdot t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{t = \dfrac{1}{800}s} \\ \boldsymbol{a} = \dfrac{720}{1/800} = \boldsymbol{5{,}8.10^5\, m/s^2} \end{cases}$$

c) une voiture qui heurte un arbre à une vitesse de 90 km/h, si l'avant de la voiture est enfoncé de 25 cm.




La distance parcourue par la roue avant de la voiture pendant sa décélération est donc $\Delta x = 25cm = 0{,}25m$. Cette fois, la vitesse diminue, ce qui est caractérisé par un vecteur accélération de sens opposé au vecteur vitesse. Etant donné que nous avons choisi une vitesse positive (dans le sens du référentiel), il nous faut trouver une accélération négative !

| Si on observe le point de départ, à l'instant du choc t=0 : | Si on observe l'instant t auquel la voiture est à l'arrêt: |
|---|---|
| t = 0 | t = ? |
| v(0)= 25 m/s | v(t)= 0 m/s |
| x(0)= 0 m | x(t)= 0,25m |

On complète les deux équations du mouvement :

$$\begin{cases} 0{,}25 = 0 + 25 \cdot t + \dfrac{a \cdot t^2}{2} \\ 0 = 25 + a \cdot t \end{cases}$$

ATTENTION : l'erreur que je rencontre souvent, est la confusion entre $v(0)$ et $v(t)$ dans la seconde équation.

$v(0)$ est bien la vitesse quand le MRUD commence (en $t = 0$), ici elle vaut $+25\ m/s$.

$v(t)$ est, quant à elle, la valeur de la vitesse à la fin du MRUD (à l'instant t), la voiture finit par s'arrêter, on a : $v(t) = 0\,m/s$.

On doit donc écrire $0 = 25 + a \cdot t$ et pas $25 = 0 + a \cdot t$!

$$\begin{cases} 0{,}25 = 0 + 25 \cdot t + \dfrac{a \cdot t^2}{2} \\ 0 = 25 + a \cdot t \end{cases}$$

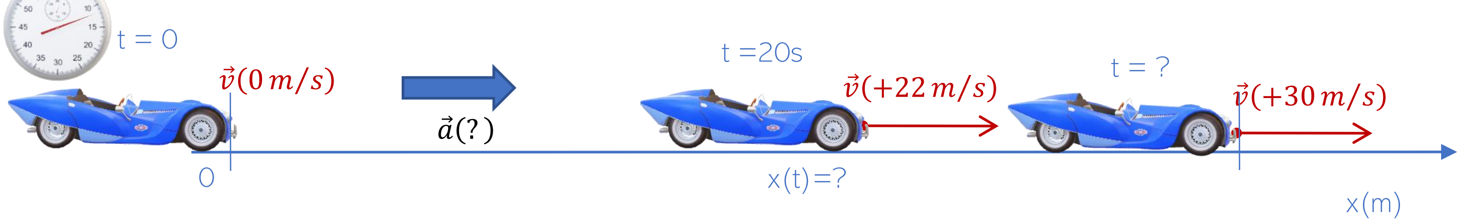
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}25 = 25 \cdot t + \frac{-25t}{2} \\ -25 = a \cdot t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}25 = 25 \cdot t - 12{,}5t = 12{,}5t \\ -25 = a \cdot t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{0{,}25}{12{,}5} = 0{,}02s \\ a = \frac{-25}{0{,}02} = -1250\,m/s^2 \end{cases}$$

14. Une voiture part arrêtée et atteint la vitesse de 22 m/s en 20 s.

   a) Quelle est son accélération ?
   b) Combien de temps mettra-t-elle pour passer de 22 à 30 m/s avec la même accélération ?




a. On connait la variation de vitesse ($\Delta v = v(t) - v(0) = 22 - 0 = 22\,m/s$) et la durée nécessaire à cette variation ($\Delta t = 20s$), on trouve donc l'accélération :

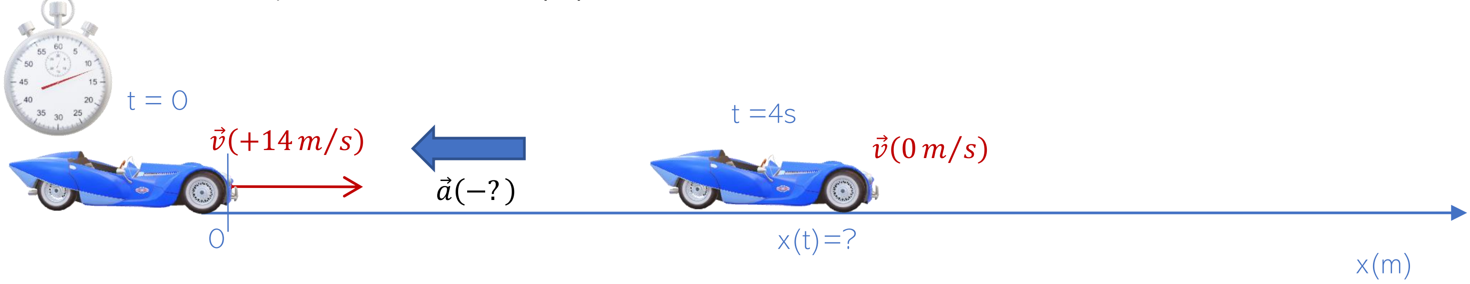
$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{22-0}{20} = 1{,}1\,m/s^2$$

b. On peut encore utiliser cette relation :

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Leftrightarrow 1{,}1 = \frac{30-22}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{8}{1{,}1} = 7{,}3s$$

15. Les freins d'une voiture sont appliqués alors qu'elle roule à 14 m/s ce qui provoque un arrêt après 4 s.

   a) Quelle est l'accélération ?
   b) Quel temps aurait-elle mis pour s'arrêter, avec la même accélération, à partir d'une vitesse initiale de 44 m/s ?
   c) En combien de temps passe-t-elle de 20 à 10 m/s, avec cette accélération ?



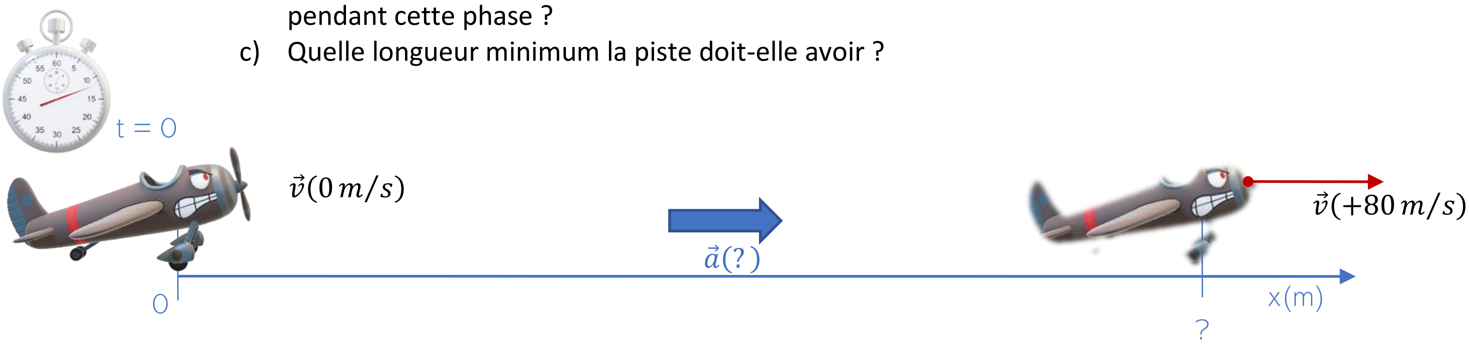

a) On connait encore $\Delta v$ et $\Delta t$, on peut donc écrire $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0-14}{5} = -3{,}5\,m/s^2$

b) $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Leftrightarrow -3{,}5 = \frac{0-44}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{-44}{-3{,}5} = 12{,}6s$

c) $\Delta t = \frac{10-20}{-3{,}5} = 2{,}9s$

16. Un avion décolle à 80 m/s, une vitesse qu'il atteint 35 s après son départ arrêté.

    a) Combien de temps a-t-il mis pour atteindre la vitesse de 20 m/s ?
    b) Combien de temps met-il pour passer de 60 à 80 m/s ? Quelle distance parcourt-il pendant cette phase ?
    c) Quelle longueur minimum la piste doit-elle avoir ?




De la même façon, on connait la variation de vitesse (de 0 à 80 m/s) et le temps nécessaire pour que cette variation ait lieu (35s), ce qui nous permet de déterminer l'accélération :

a) $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Leftrightarrow a = \frac{80-0}{35} = 2{,}3\, m/s^2$

Avec cette même accélération, pour atteindre 20m/s en partant de 0m/s, on aura :

$$\Delta t = \frac{20-0}{2{,}3} = 8{,}8s$$

b) $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{80-60}{2{,}3} = 8{,}7s$

$$x(t) = x(0) + v(0)\cdot t + \frac{a\cdot t^2}{2} = 0 + 0\cdot t + \frac{2{,}3\cdot 8{,}7^2}{2} = \mathbf{87\ m}$$

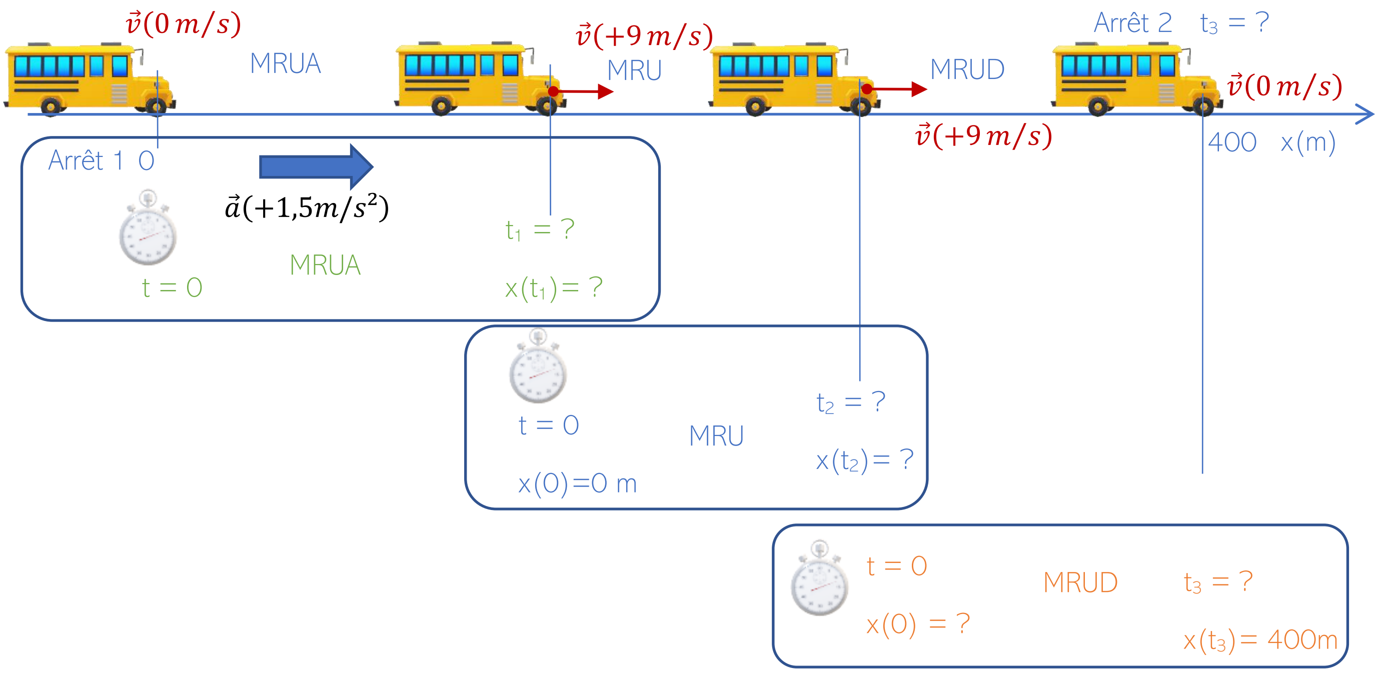
Rmq : C'est la position atteinte après 8,7s. La distance parcourue : $\Delta x = x(t) - x(0) = x(t) - 0 = x(t)$

c) L'avion décolle à une vitesse de 80 m/s, en partant de 0m/s, avec une accélération de 2,3m/s². Au cours de ce MRUA (mouvement rectiligne à accélération constante), qui dure 35s, on peut écrire :

$$x(t) = x(0) + v(0)\cdot t + \frac{a\cdot t^2}{2} = 0 + 0\cdot t + \frac{2{,}3\cdot 35^2}{2} = 1{,}4.10^3 m = \mathbf{1{,}4km}$$

17. Un bus fait 400 m entre deux arrêts. Il part arrêté et accélère à 1,5 m/s² jusqu'à ce qu'il atteigne une vitesse de 9 m/s. Il continue ensuite à vitesse constante et freine ensuite avec une décélération de -2 m/s² jusqu'au prochain arrêt. Déterminez la durée totale du trajet.

Dans cet énoncé, il y a 3 étapes (puisque 3 mouvements différents : MRUA/MRU/MRUD) et je décide de remettre le chrono à zéro à chaque début d'étape, parce que c'est plus simple !




**MRUA pendant $t_1$ secondes**

v(0) = 0 m/s (il part arrêté)
$v(t_1)$ = 9 m/s
x(0) = 0 m
a = +1,5 m/s² (même sens que la vitesse => +)

$$\begin{cases} x(t_1) = 0 + 0 \cdot t_1 + \dfrac{1{,}5 \cdot t_1^2}{2} \\ 9 = 0 + 1{,}5 \cdot t_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(t_1) = \dfrac{1{,}5 \cdot t_1^2}{2} \\ \dfrac{9}{1{,}5} = t_1 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{t_1 = 6s} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(t_1) = \dfrac{1{,}5 \cdot 6^2}{2} = \boldsymbol{27m} \\ t_1 = 6s \end{cases}$$

**MRU pendant $t_2$ secondes**

$v(t_1) = v(t_2)$ = 9 m/s

On ne sait pas combien de temps.
On ne sait pas jusqu'où.
On ne sait donc pas, pour l'instant, compléter la seule et unique équation du MRU :

$$x(t) = x(0) + v \cdot t$$

$$x(t_2) = 27 + 9 \cdot t$$

**MRUD pendant $t_3$ secondes**

x(0) = ?
v(0) = 9 m/s (en fin de MRU = début de MRUD)
$v(t_3)$ = 0 m/s (il s'arrête)
$x(t_3)$ = 400 m
a = - 2 m/s² (sens opposé à la vitesse et donc au référentiel)

$$\begin{cases} 400 = x(0) + 9 \cdot t_3 - \dfrac{2 \cdot t_3^2}{2} \\ 0 = 9 - 2 \cdot t_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 400 = x(0) + 9 \cdot t_3 - \dfrac{2 \cdot t_3^2}{2} \\ \dfrac{9}{2} = t_3 \;\Rightarrow\; t_3 = 4{,}5s \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 400 = x(0) + 9 \cdot 4{,}5 - \dfrac{2 \cdot 4{,}5^2}{2} \\ t_3 = 4{,}5s \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(0) = 379{,}75m \\ t_3 = 4{,}5s \end{cases}$$

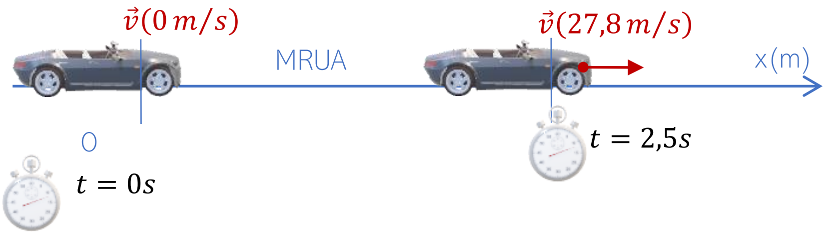
On peut compléter le schéma de départ : $x(t_1)$ = 27m et $x(t_2)$ = 379,75 m

$$\Rightarrow x(t_2) = 27 + 9 \cdot t \;\Leftrightarrow\; 379{,}75 = 27 + 9t \;\Rightarrow\; t = \frac{379{,}75 - 27}{9} = 39{,}2s \text{ de MRU}$$

⇒ **Durée totale du trajet** : $\Delta t$ = 6 + 39,2 + 4,5 = **49,7 s**

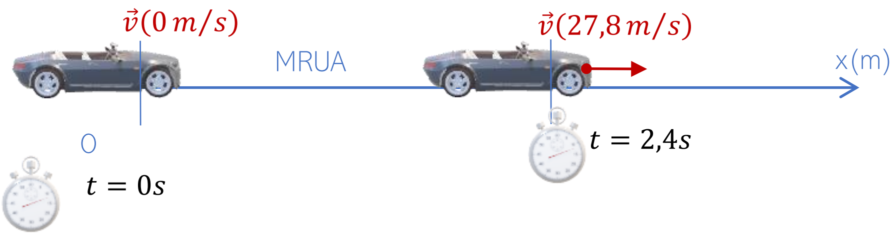
18. Extrait de [www.gqmagazine.fr](http://www.gqmagazine.fr) (le 10/01/20). « En Suède, il n'y a pas qu'Ikea ou Volvo, il y a aussi Koenigsegg, un riche entrepreneur qui fabrique des bolides pour rouler à 400 km/h. Alors forcément pour atteindre une telle vitesse de pointe il faut accélérer très fort, ce que la Regera réalise à la perfection puisqu'elle passe de 0 à 100 km/h en 2,5 s. Vous pouvez acquérir ce bolide de 1500ch (V8 hybride) pour 2,1 millions d'euros. Ceci dit, la Bugatti Chiron Sport réalise le même exploit en 2,4s ! Mais elle vous coutera 3,2 millions d'euros. Le roulement de tambour revient toutefois à la Rima CTwo, une voiture croate 100% électrique, de 1914ch et qui est capable de passer de 0 à 100km/h en 1,85 seconde seulement ! » Et ce, pour la modique somme de 2,2 millions d'euros, ce qui en fait notre Maître-achat ! Détermine l'accélération moyenne que ces voitures sont capables de tenir sur le 0-100km/h et détermine la distance qui leur est nécessaire. On parle de MRUA si on considère que les 100km/h sont atteints au bout d'une ligne droite et que l'accélération est constante (ce qui n'est bien sûr pas le cas en réalité).

KOENIGSEGG REGERA



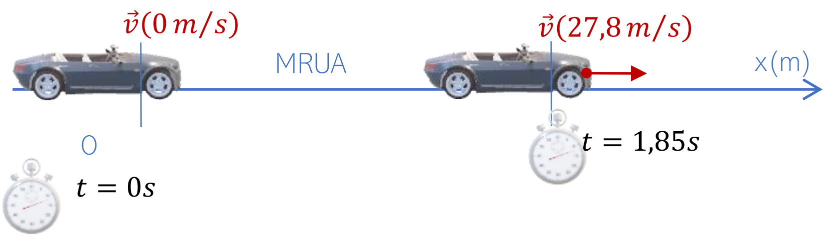

$$\begin{cases} x(t) = 0 + 0 \cdot t + \dfrac{a \cdot t^2}{2} \\ \boldsymbol{a_1} = \dfrac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta \boldsymbol{t}} = \dfrac{\mathbf{27,8 - 0}}{\mathbf{2,5}} = \mathbf{11,1}\,\boldsymbol{m/s^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = \dfrac{11{,}1 \cdot 2{,}5^2}{2} = \mathbf{35}\boldsymbol{m} \\ \boldsymbol{a_1} = \mathbf{11,1}\,\boldsymbol{m/s^2} \end{cases}$$

BUGATTI CHIRON SPORT



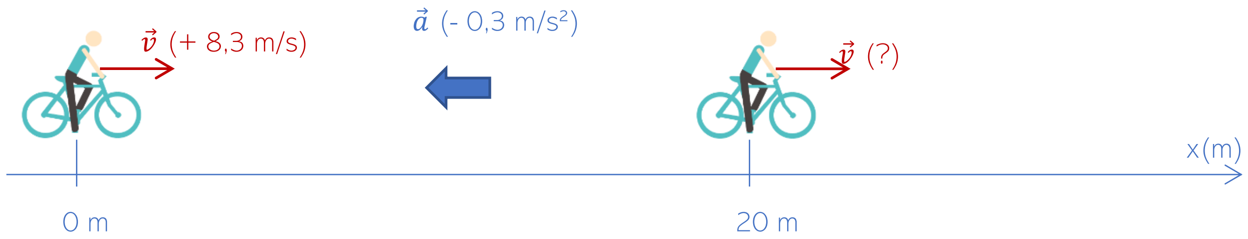

$$\begin{cases} \boldsymbol{a_2} = \dfrac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta \boldsymbol{t}} = \dfrac{\mathbf{27,8 - 0}}{\mathbf{2,4}} = \mathbf{11,6}\,\boldsymbol{m/s^2} \\ x(t) = \dfrac{11{,}6 \cdot 2{,}4^2}{2} = \mathbf{33}\boldsymbol{m} \end{cases}$$

RIMA CTWO




$$\begin{cases} \boldsymbol{a_3} = \dfrac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta \boldsymbol{t}} = \dfrac{\mathbf{27,8 - 0}}{\mathbf{1,85}} = \mathbf{15,0}\,\boldsymbol{m/s^2} \\ x(t) = \dfrac{15{,}0 \cdot 1{,}85^2}{2} = \mathbf{26}\boldsymbol{m} \end{cases}$$

19. Un cycliste roulant à 30 km/h cesse soudain de pédaler. Quelle vitesse aura-t-il 20 m plus loin si sa décélération (due aux frottements) est de 0,3 m/s²?




Rmq : le cycliste perd de la vitesse, le vecteur $\vec{a}$ est de sens opposé au vecteur $\vec{v}$

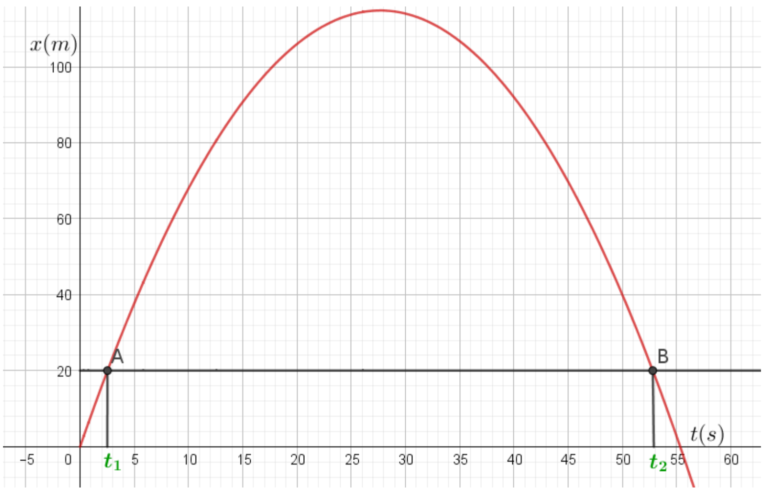
$$\begin{cases} x(t) = 0 + 8{,}3t + \frac{-0{,}3t^2}{2} \ (1) \\ v(t) = 8{,}3 - 0{,}3t \ (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20 = 8{,}3t - \frac{0{,}3t^2}{2} \\ v(t) = 8{,}3 - 0{,}3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}15t^2 - 8{,}3t + 20 = 0 \quad (3) \\ v(t) = 8{,}3 - 0{,}3t \end{cases}$$

On reconnait dans l'équation (3) une équation du second degré. On peut donc chercher deux racines $t_1$ et $t_2$. L'équation est déjà remise sous sa forme canonique, mais il est important, à ce stade, de remarquer que les racines correspondront à x(t)=20m, condition posée, à partir de (1) pour obtenir (3).

$$t_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-8{,}3) - \sqrt{8{,}3^2 - 4 \cdot 0{,}15 \cdot 20}}{0{,}30} = \frac{8{,}3 - \sqrt{56{,}9}}{0{,}3} = 2{,}52\ s$$

$$t_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-8{,}3) + \sqrt{8{,}3^2 - 4 \cdot 0{,}15 \cdot 20}}{0{,}30} = \frac{8{,}3 + \sqrt{56{,}9}}{0{,}3} = 52{,}8\ s$$

On se retrouve avec deux racines positives et donc plausibles pour un temps (en physique, dès qu'une racine, qui correspond à un temps, est négative, on sait que l'on doit la rejeter). Il faut donc s'interroger sur le sens physique de ces deux racines. Pour cela, je vous propose de regarder le graphique de la position du cycliste au cours du temps : x(t) (autrement dit, le graphique de l'équation de la parabole (1)).



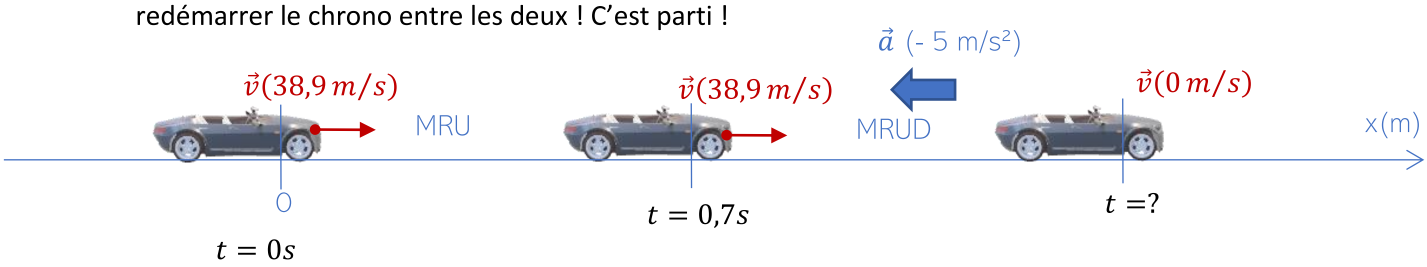

Les deux racines correspondent bien aux instants auxquels x vaut 20m, ce qui arrive une 1ère fois au point A. A cet instant, la tangente au graphe x(t) est encore positive et la vitesse aussi ! Le cycliste se déplace encore vers la droite. Au point B, la tangente au graphe x(t) est négative, ce qui correspond à une vitesse négative, càd à un cycliste qui se déplace vers la gauche !!!

En effet, au sommet de la parabole (aux environs de 27s), la tangente au graphe est nulle, ce qui correspond à un arrêt du cycliste ! Physiquement parlant, l'énoncé se termine au point A, le cycliste atteint une première fois, après 2,52s ; la position x=20m et on a répondu au problème. Mathématiquement, la vitesse continue à décroitre à un rythme de -0,3m/s² jusqu'à s'annuler (après 27s environ), puis la vitesse devient de plus en plus négative (sa valeur diminue de 0,3m/s chaque seconde). Toutefois, physiquement, une vitesse de plus en plus négative, correspond à une vitesse de plus en plus grande dans le sens opposé au référentiel. On aurait donc un cycliste qui passe en x=20m après 2,52s ; qui va s’arrêter un peu plus loin (aux environs de 115m = sommet de la parabole), qui fait ensuite demi-tour, puis accélère vers la gauche, où il repassera une seconde fois en x=20m (après 52,8s précisément) !

Remarquons enfin, qu’on peut trouver mathématiquement l’endroit et l’instant auquel le cycliste s’arrête, il suffit d’imposer v(t)=0 dans la relation (3), on trouve bien $t = 27{,}7s$ et en remplaçant $t$ par cette valeur, dans l’équation (1), on trouve $x(t) = 114{,}8m$.

20. Calculez la distance de freinage d’un véhicule roulant à 140 km/h. On supposera que nous sommes dans des conditions normales, c’est-à-dire un temps de réaction du conducteur de 0,7s et une décélération de 5 m/s².

Dans cet énoncé, il faut se rendre compte qu’un temps de réaction est un temps durant lequel le chauffeur voit l’obstacle et demande à son cerveau de commander les muscles de sa jambe droite pour freiner. **La décélération effective n’intervient donc qu’après ce temps de réaction**, durant lequel la vitesse ne change pas ! On a donc un MRU qui dure 0,7s ; suivi d’un MRUD dont on ne connait pas encore la durée. De plus, on parle d’une distance de freinage, ce qui veut dire que la vitesse finale est nulle ! Nous revoilà avec deux mouvements différents, il faudra écrire des équations différentes et redémarrer le chrono entre les deux ! C’est parti !




MRU

Il faut utiliser la seule équation du MRU : $x(t) = x(0) + v \cdot t$ ou, la même équation écrite de façon plus condensée : $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

$x(t) = 0 + 38{,}9 \cdot 0{,}7 = 27{,}2m$

MRUD

Le MRUD commence enfin ! Remettons le chrono à 0 et écrivons les équations du mouvement.

**Il faut, en effet redémarrer le chrono, car, étant donné que le type de mouvement change, on doit écrire de nouvelles équations (d’une droite, on passe à une parabole pour x(t)).**

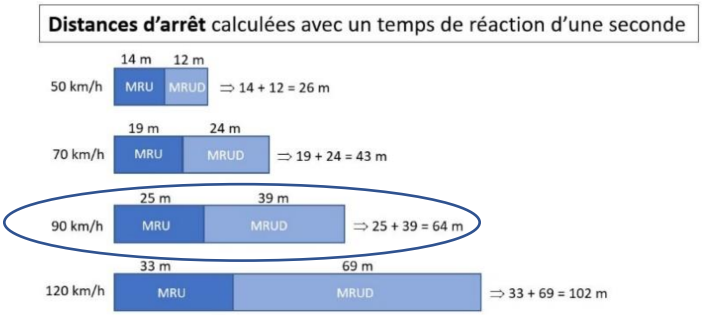
$$\begin{cases} x(t) = 27{,}2 + 38{,}9t + \frac{-5t^2}{2} \\ v(t) = 38{,}9 - 5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = 27{,}2 + 38{,}9t + \frac{-5t^2}{2} \\ 0 = 38{,}9 - 5t \Rightarrow \boldsymbol{t} = \frac{38{,}9}{5} = \boldsymbol{7{,}8s} \end{cases}$$

La phase de décélération dure 7,8s ; il suffit de remplacer t par cette valeur dans l’équation horaire de la position (x(t)), pour savoir où se trouve la voiture lorsqu’elle s’arrête :

$$x(t) = 27{,}2 + 38{,}9t + \frac{-5t^2}{2} = 27{,}2 + 38{,}9 \cdot 7{,}8 - \frac{5 \cdot 7{,}8^2}{2} = 179\,m$$

**La distance totale de freinage est donc de 179m, les 27,2 premiers mètres sont parcourus pendant le temps de réaction, tandis que les 151,8m suivants sont parcourus en freinant effectivement.**

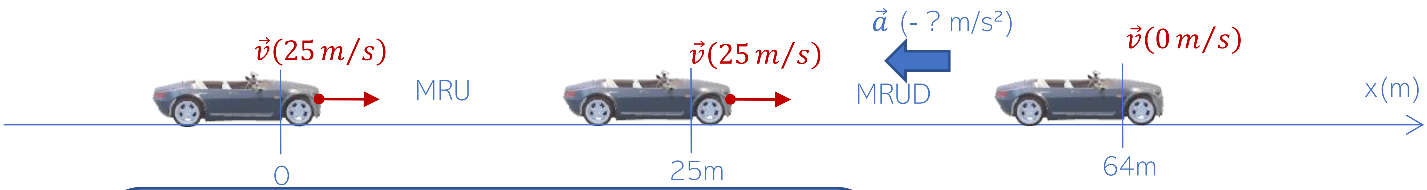
21. Un véhicule roule à une certaine vitesse quand, à un instant donné, le conducteur aperçoit un obstacle. Avant d'enfoncer la pédale de frein, un temps de réaction est indispensable, pendant lequel le véhicule parcourt une certaine distance qui peut s'avérer déterminante. On suppose dans cet exercice que le temps de réaction est de 1 seconde.




Les tests effectués sur un véhicule de masse 1000 kg (voir document ci-contre) donnent une idée de ce que peut représenter la distance d'arrêt en fonction de la vitesse du véhicule, en cas de freinage urgent. Ces tests ont été réalisés avec une voiture en parfait état et sur route sèche.

Détermine la valeur de la décélération de la voiture pour une vitesse initiale de 90 km/h.

Il s'agit, dans cet exercice, d'aller chercher des informations sur le schéma. On demande de travailler avec une vitesse initiale de 90km/h = 25m/s, il faut donc considérer la 3$^{\text{ème}}$ ligne. On retrouve, comme dans l'exercice précédent, un MRU qui correspond au temps de réaction du chauffeur, suivi de la phase de freinage réel.




$t = 0s$ $\qquad$ $t = ?$

MRU

Il faut utiliser la seule équation du MRU : $x(t) = x(0) + v \cdot t$

$x(t) = 0 + 38{,}9 \cdot 0{,}7 = 27{,}2m$

Le MRUD commence ensuite ! **Remettons le chrono à 0** et écrivons les équations du mouvement :

$t = \ 0$ $\qquad$ MRUD $\qquad$ $t = ?$

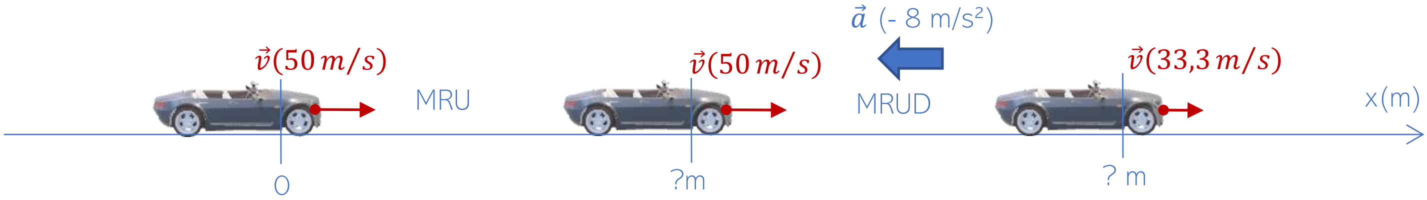
$$\begin{cases} x(t) = x(0) + v(0) \cdot t + \dfrac{at^2}{2} \\ v(t) = v(0) + at \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 64 = 25 + 25t + \dfrac{at^2}{2} \\ 0 = 25 + at \ \Rightarrow \ \boldsymbol{at = -25} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 64 = 25 + 25t + \dfrac{-25 \cdot t}{2} \Leftrightarrow 64 - 25 - 25t + 12{,}5t = 0 \\ \boldsymbol{at = -25} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 39 - 12{,}5t = 0 \\ \boldsymbol{at = -25} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{39}{12{,}5} = 3{,}12\ s \\ \boldsymbol{at = -25} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{t = 3{,}12\ s} \\ \boldsymbol{a = \dfrac{-25}{3{,}12} = -8{,}0\ m/s^2} \end{cases}$$

22. Lorsque le conducteur d'une voiture roulant à 180 km/h (=50m/s) sur une autoroute aperçoit au loin un radar de la police, il a un temps de réaction de 0,4 s et décélère ensuite à du 8 m/s² (valeur négative si v est positive). La vitesse maximale tolérée étant de 120 km/h(=33,3m/s), quelle distance ce conducteur aura-t-il parcourue depuis l'observation initiale jusqu'à ce que sa vitesse soit redevenue acceptable (i.e. : 120 km/h) ?

   a. 86,8 m
   b. 126,8 m
   c. 106,8 m
   d. 102,8 m
   e. 82,7 m




$t = 0s$ $\qquad$ $t = 0{,}4s$

MRU

$x(t) = 0 + 50 \cdot 0{,}4 = 20m$

Le conducteur passe de $x(0) = 0m$ à $x(t) = 20m$ pendant son temps de réaction. Le MRUD commence ensuite ! **Remettons le chrono à 0** et écrivons les équations du mouvement :

$t = 0s$ $\qquad$ $t = ?$

MRUD

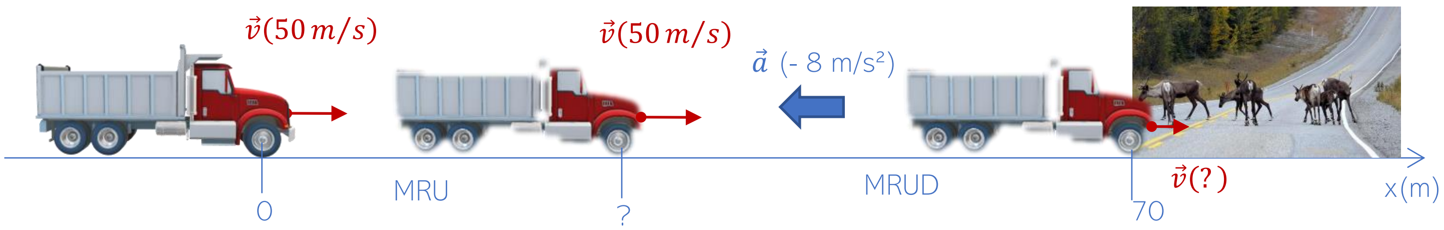
$$\begin{cases} x(t) = x(0) + v(0) \cdot t + \frac{at^2}{2} \\ v(t) = v(0) + at \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = 20 + 50t - \frac{8t^2}{2} \\ 33{,}3 = 50 - 8t \Rightarrow \boldsymbol{t} = \frac{50-33{,}3}{8} = 2{,}09s \end{cases}$$

On trouve facilement le temps durant lequel le freinage permet à la voiture de passer de 50m/s à 33,3m/s. Il suffit ensuite d'évaluer la position atteinte par la voiture au bout de ce temps :

$$x(t) = 20 + 50 \cdot 2{,}09 - \frac{8 \cdot 2{,}09^2}{2} = 107m$$

Il s'agit donc de la proposition (c) (pour retrouver tous les chiffres significatifs, il suffit de garder toutes les valeurs en mémoire dans la calculatrice, sans les arrondir).

23. Le chauffeur d'un camion roulant à 180 km/h aperçoit soudain un troupeau de caribous à 70 mètres devant lui. Le temps de réflexe du chauffeur est de 0,8s et la décélération maximale de 8 m/s². Dans ces conditions, il ne peut pas éviter le troupeau. Quelle sera, **en km/h**, la vitesse de collision ? Attention : le piège, dans cette question est de penser qu'il faut travailler avec des km/h. je vous rappelle que les accélérations considérées dans les équations des MRUV imposent de travailler avec les unités du S.I.= le mètre et la seconde. Il faudra trouver la vitesse de collision en m/s, puis seulement, la convertir en km/h.




$t = 0s$ MRU $t = ?$

$x(t) = 0 + 50 \cdot 0{,}8 = 40m$

Le conducteur passe de $x(0) = 0m$ à $x(t) = 40m$ pendant son temps de réaction. Le MRUD commence ensuite ! **Remettons le chrono à 0** et écrivons les équations du mouvement. On sait que la position initiale du MRUD est $x(0) = 40m$ et que la position finale est celle de la collision, càd $x(t) = 70m$.

$t = 0s$ $t = ?$

MRUD

$x(0) = 40m$ $x(t) = 70m$

$$\begin{cases} x(t) = x(0) + v(0) \cdot t + \frac{at^2}{2} \\ v(t) = v(0) + at \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 70 = 40 + 50t - \frac{8t^2}{2} \quad (1) \\ v(t) = 50 - 8t \end{cases}$$

On trouve une équation du second degré (1) à résoudre. On cherche donc les racines $t_1$ et $t_2$ qui correspondront à $x(t) = 70m$.

$$(1) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{4t^2 - 50t + 30 = 0}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-50)^2 - 4.4.30 = 2020$$

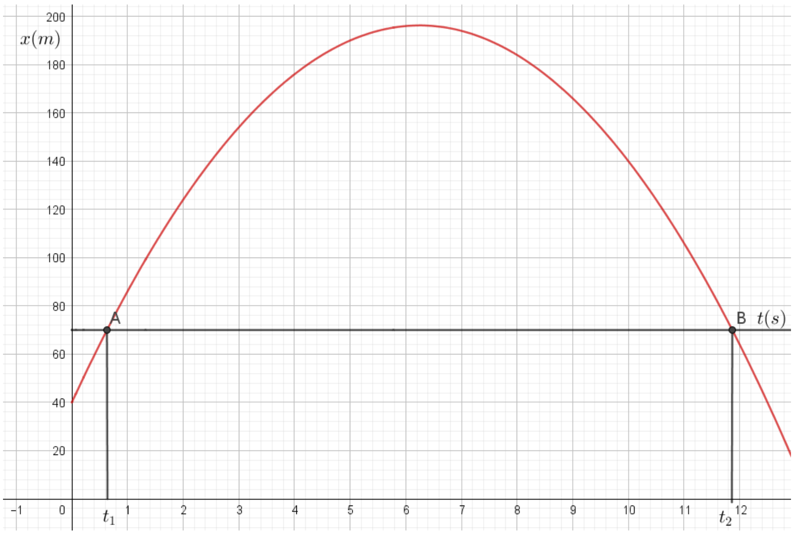
$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$t_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{50 - \sqrt{2020}}{8} = 0{,}63\ s$$

$$t_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{50 + \sqrt{2020}}{8} = 11{,}9\ s$$

Pour comprendre l'origine de ces deux racines, traçons l'équation qui modélise l'évolution de la position $x_t$ du camion au cours du temps : $x(t) = 40 + 50t - \frac{8t^2}{2}$

C'est bien une parabole dont la concavité est tournée vers le bas puisque le coefficient de $t^2$ est négatif.



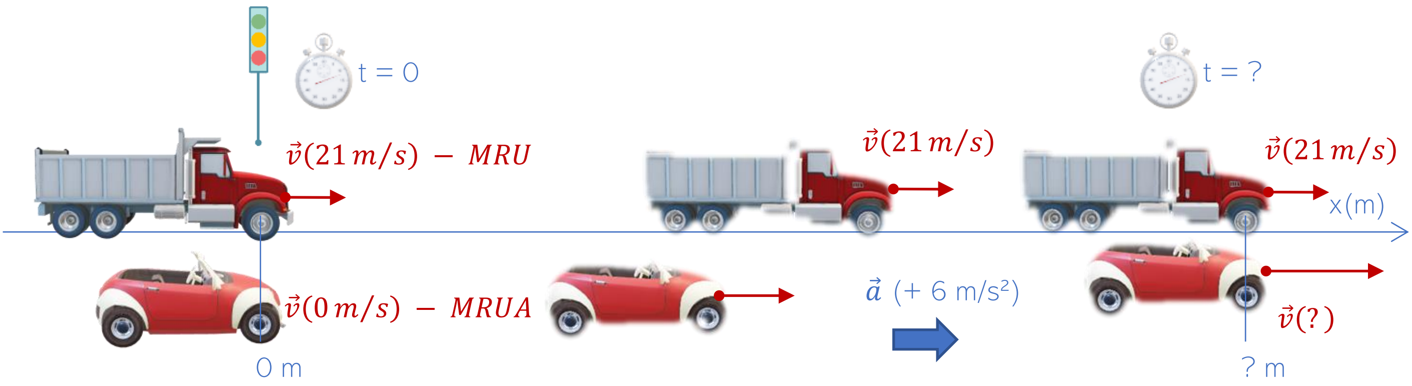

On se retrouve avec un exercice équivalent à celui du cycliste (n°19) : la première racine ($t_1$) correspond à la situation réelle du camion qui freine alors qu'il se déplace vers la droite (v>0 et a<0), tandis que la seconde racine ($t_2$) correspondrait à un camion qui s'est arrêté en x=196m et qui reviendrait vers la gauche en accélérant (v<0 et a<0).

Pour connaitre la vitesse de collision, il nous suffit d'évaluer la vitesse du camion à l'instant $t = 0{,}63s$ :

$$v(t) = 50 - 8 \cdot 0{,}63 = 45\, m/s \; = \; \boldsymbol{162\ km/h}$$

24. Lorsqu'un feu rouge passe au vert, une voiture qui était à l'arrêt, démarre avec une accélération constante de 6 m/s². Au même instant elle est dépassée par un camion roulant à une vitesse uniforme de 21 m/s.
    a) Après quelle distance la voiture rattrapera-t-elle le camion ?
    b) Quelle vitesse aura-t-elle à ce moment ?
    c) Représentez le graphe horaire de la position ainsi que celui de la vitesse des deux véhicules.

ATTENTION : pour la première fois, on se retrouve avec deux mobiles en mouvement. Dans l'exercice du troupeau de caribous, ces derniers traversaient la route et n'avaient donc aucune composante de vitesse dans la direction de celle du camion, on pouvait donc les considérer comme un obstacle fixe au milieu de la route. Ici, on a une voiture en MRUA vers la droite et un camion en MRU dans le même sens. Il faut donc écrire 2 équations pour la voiture et 1 équation pour le camion. **A ces trois équations, on ajoute un seul chrono qui étudie les deux mouvements qui se déroulent en même temps !**




a. Dans un tout premier temps, le camion poursuit sa route et prend de l'avance sur la voiture, tandis que celle-ci démarre. Au bout d'un certain temps (noté t), la voiture, qui accélère, parvient à rattraper le camion. A cet instant, on peut dire qu'ils sont tous les deux exactement au même endroit, ils ont donc la même position : $x_1(t) = x_2(t)$, si on repère le camion par un indice 1 et la voiture par un indice 2.

Ecriture de l'unique équation du MRU qui caractérise l'évolution de la position du camion (n°1) au cours du temps : $x_1(t)$. Pas besoin d'équation pour la vitesse puisqu'elle reste constante.

$$x_1(t) = 0 + 21 \cdot t$$

Ecriture des deux équations du mouvement (position x(t) et vitesse v(t)) de la voiture (n°2) en MRUA :

$$\begin{cases} x(t) = x(0) + v(0) \cdot t + \frac{at^2}{2} \\ v(t) = v(0) + at \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_2(t) = 0 + 0t + \frac{6t^2}{2} \\ v_2(t) = 0 + 6t \end{cases}$$

A instant t, auquel la voiture rattrape le camion on peut écrire que $x_1(t) = x_2(t)$ :

$$\frac{6t^2}{2} = 21t$$

$$\Leftrightarrow 3t^2 = 21t$$

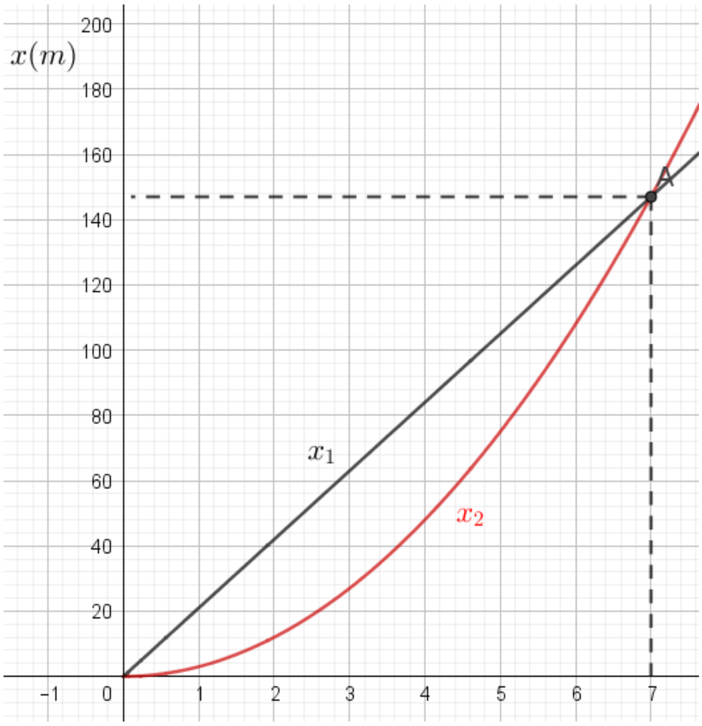
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{t = \frac{21}{3} = 7s}$$

Il suffit d'évaluer la position de la voiture (ou du camion, puisqu'à cet instant, ils sont au même endroit) après 7 s d'accélération : $x_2(t) = 3t^2 = 3 \cdot 7^2 = \mathbf{147\ m}$

b. Il suffit d'évaluer la vitesse de la voiture après 7 s d'accélération : $v_2(t) = 6t = 6 \cdot 7 = 42\ m/s$

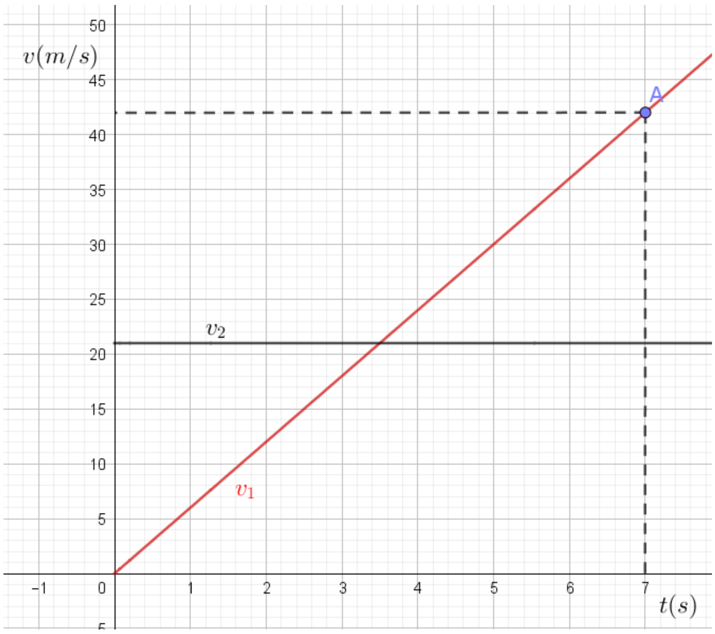
c. On sait que le graphique $x_1(t)$ du camion sera une droite croissante de pente égale à $v_1 = 21\ m/s$ et dont l'équation est $x_1(t) = 21 \cdot t$

Le graphique $x_2(t)$ de la voiture sera une parabole de concavité tournée vers le haut (a>0) et dont l'équation est $x_2(t) = 3 \cdot t^2$.



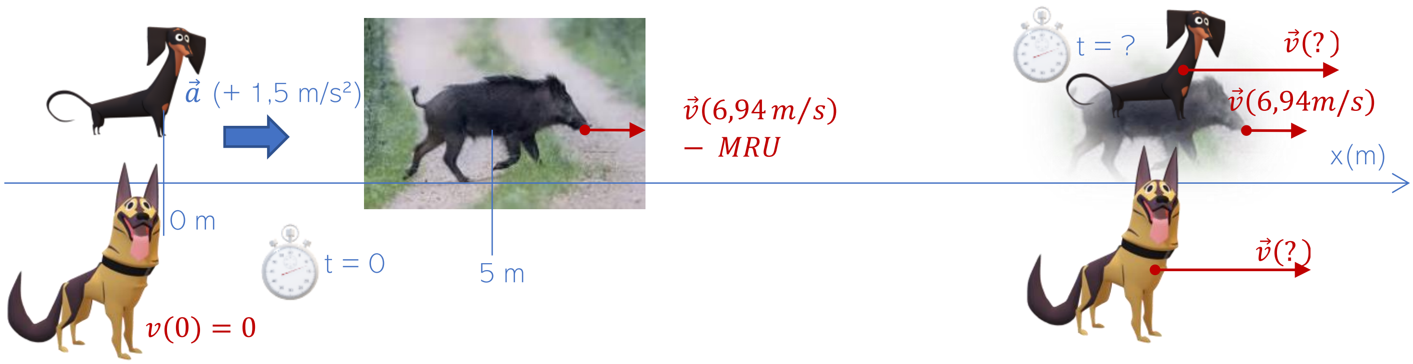

La voiture rattrape le camion après 7s.

Le graphique de la vitesse du camion est une droite horizontale de valeur constante égale à 21 m/s.
Le graphique $v_2(t)$ du camion sera une droite croissante de pente égale à $a_2 = 6\ m/s^2$ et dont l'équation est $v_2(t) = 6 \cdot t$




La vitesse de la voiture est bien de 42m/s après 7s.

25. Deux chiens de chasse aperçoivent, à 5m, du gibier s'éloignant à la vitesse constante de 25km/h (=6,94m/s). Ils démarrent alors avec une accélération de 1,5m/s². Calculer la durée nécessaire aux chiens pour rattraper leur proie, leur vitesse à cet instant et la distance qu'ils ont dû parcourir. Tracez l'allure du graphique x(t) sur lequel vous superposez les courbes des chiens avec celle du gibier.




Cet exercice est tout-à-fait similaire au précédent : il y a deux entités en mouvement à étudier : les chiens en MRUA et le gibier en MRU. Dans un tout premier temps, le gibier poursuit sa route et prend de l'avance sur les chiens, tandis que ceux-ci démarrent. Au bout d'un certain temps (noté t), les chiens, parviennent à rattraper le gibier. A cet instant, on peut dire qu'ils sont tous exactement au même endroit, ils ont donc la même position : $x_1(t) = x_2(t)$, si on repère le gibier par un indice 1 et les chiens par un indice 2.

Ecriture de l'unique équation du MRU qui caractérise l'évolution de la position du gibier (n°1) au cours du temps : : $x_1(t)$. Pas besoin d'équation pour la vitesse puisqu'elle reste constante.

$$x_1(t) = 5 + 6{,}94 \cdot t$$

Ecriture des deux équations du mouvement position x(t) et vitesse v(t) des chiens (n°2) en MRUA :

$$\begin{cases} x(t) = x(0) + v(0) \cdot t + \frac{at^2}{2} \\ v(t) = v(0) + at \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2(t) = 0 + 0t + \frac{1{,}5t^2}{2} = 0{,}75t^2 \\ v_2(t) = 0 + 1{,}5t \end{cases}$$

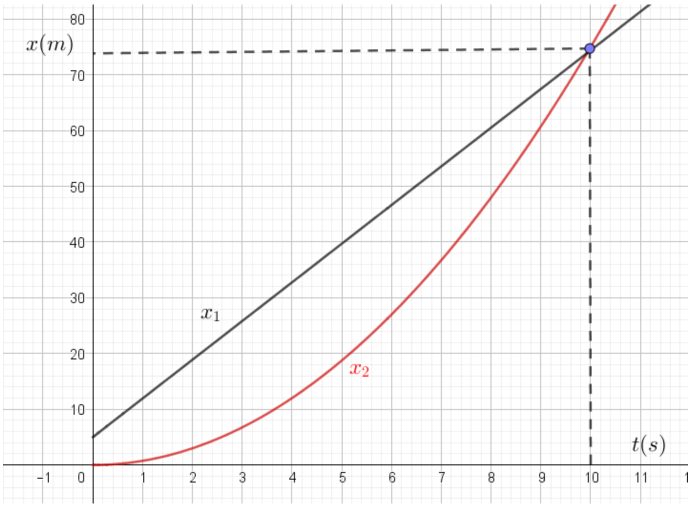
A instant t, auquel les chiens rattrapent le gibier, on peut écrire que $x_1(t) = x_2(t)$ :

$$0{,}75t^2 = 5 + 6{,}94t \Leftrightarrow \mathbf{0{,}75t^2 - 6{,}94t - 5 = 0}$$

On se retrouve avec une équation du second degré à résoudre. Physiquement, les racines correspondent à l'instant auquel $x_1 = x_2$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6{,}94)^2 - 4.0{,}75.(-5) = 63{,}16$$
$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$t_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6{,}94 - \sqrt{63{,}16}}{1{,}5} = -0{,}67\ s$$
$$t_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6{,}94 + \sqrt{63{,}16}}{1{,}5} = 9{,}92\ s$$

On se retrouve, une fois de plus, avec deux solutions possibles. Cette fois, il est évident que la première racine est à rejeter puisqu'un temps négatif n'existe pas. Il est toutefois intéressant de tracer l'allure des graphiques x(t) pour critiquer le résultat et confirmer l'exactitude du développement.




On sait que le graphique $x_1(t)$ du gibier sera une droite croissante dont l'équation est $x_1(t) = 5 + 6{,}94 \cdot t$

Le graphique $x_2(t)$ des chiens sera une parabole de concavité tournée vers le haut (a>0) et dont l'équation est $x_2(t) = 0{,}75 \cdot t^2$.
On voit en effet qu'en prolongeant la droite du MRU et la parabole du MRUA pour les valeurs négatives de t, on obtient une deuxième racine $x_1(t) = x_2(t)$ comprise entre $-1\ et\ -0{,}5s$, ce qui confirme la valeur trouvée de $-0{,}67\ s$.

Il faut encore évaluer la vitesse des chiens après 9,92s :

$$v_2(t) = 0 + 1{,}5 \cdot 9{,}92 = 14{,}9\ m/s\ =\ \boldsymbol{54\ km/h}$$

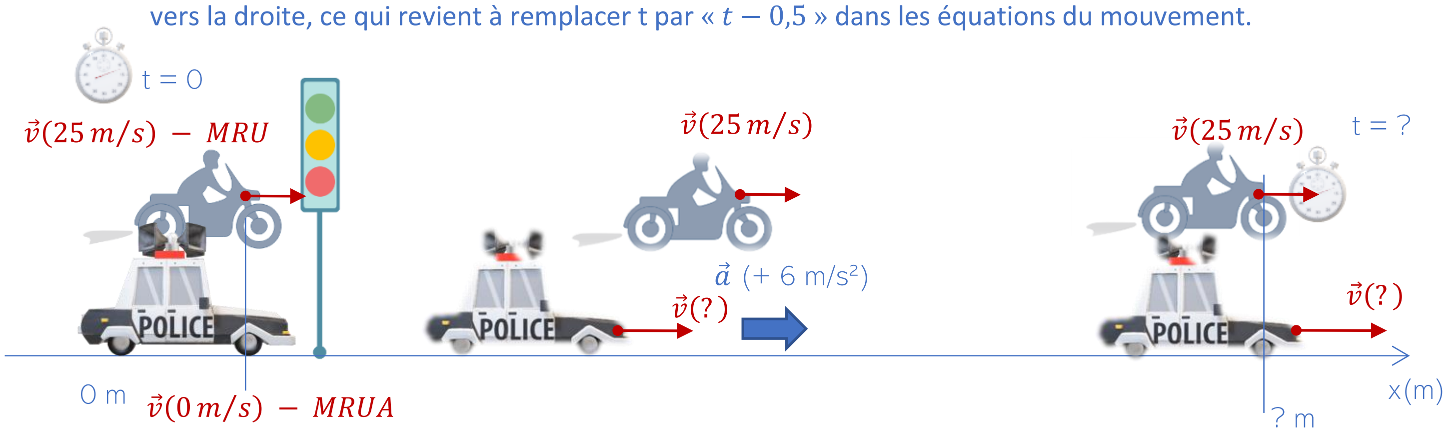
Il faut enfin calculer la position des chiens après 9,92 s d'accélération :

$$x_2(t) = 0{,}75t^2 = 0{,}75 \cdot 9{,}92^2 = \boldsymbol{73\ m}$$

26. Une voiture de police de type BMW M5 est arrêtée à un feu rouge. Une moto grille le feu rouge en roulant à une vitesse constante de 90 km/h (25m/s). La voiture de police démarre, après un temps de réaction de 0.5s, avec une accélération constante de 6 m/s².

ATTENTION : pour la première fois, on se retrouve avec deux mobiles en mouvement et un retard de l'un par rapport à l'autre. En effet, pendant les 0,5s de réaction des policiers, la moto prend de l'avance, mais les policiers ne bougent pas. On peut donc simplement translater la courbe $x(t)$ du mouvement des policiers vers la droite ! Exactement comme cela a été expliqué dans la résolution des exercices sur le MRU, il y a deux résolutions possibles qui dépendent de l'instant auquel on choisit t=0.

**1ère méthode** : on enclenche le chrono (t=0) quand le motard grille le feu rouge. Le mouvement de la voiture de police ne débutera que lorsque $t = 0{,}5s$ au chrono ; il faut donc décaler la courbe $x_{police}(t)$ vers la droite, ce qui revient à remplacer t par « $t - 0{,}5$ » dans les équations du mouvement.




MRU de la moto (n°1) :

$$x_1(t) = 0 + 25 \cdot t$$

Ecriture des deux équations du mouvement position x(t) et vitesse v(t) de la police (n°2) en MRUA. Attention, il ne faut pas oublier d'introduire le retard de 0,5s :

$$\begin{cases} x(t) = x(0) + v(0) \cdot t + \dfrac{at^2}{2} \\ v(t) = v(0) + at \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_2(t) = 0 + 0(t-0{,}5) + \frac{6(t-0{,}5)^2}{2} = 3(t^2 - t + 0{,}25) \quad = \quad 3t^2 - 3t + 0{,}75 \\ v_2(t) = 0 + 6(t-0{,}5) = \ 6t - 3 \end{cases}$$

A instant t, auquel les policiers rattrapent le motard, on peut écrire que $x_1(t) = x_2(t)$ :

$$3t^2 - 3t + 0{,}75 = 25t \Leftrightarrow \mathbf{3t^2 - 28t + 0{,}75 = 0}$$

On trouve une équation du second degré à résoudre. On cherche les racines $t_1$ et $t_2$ qui correspondront à $x_1(t) = x_2(t)$.

$$\mathbf{3t^2 - 28t + 0,75 = 0}$$

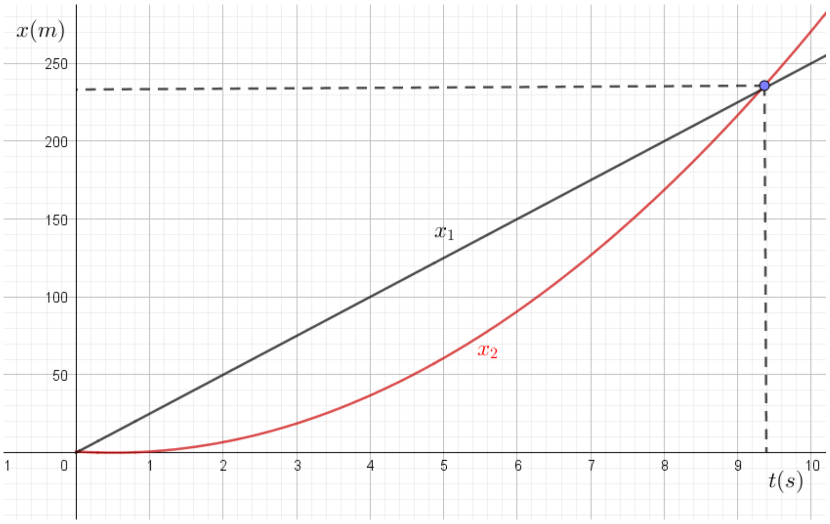
$$\Delta = b^2 - 4ac = (-28)^2 - 4.3.0{,}75 = 775$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$t_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{28 - \sqrt{775}}{6} = 0{,}03\ s$$

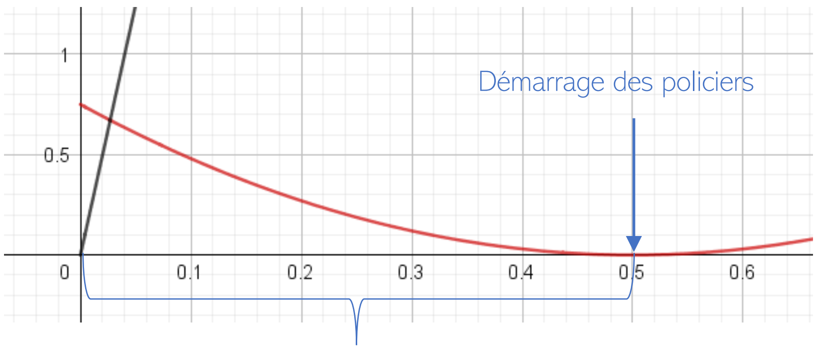
$$t_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{28 + \sqrt{775}}{6} = 9{,}3\ s$$

On se retrouve, une fois de plus, avec deux solutions possibles. Traçons les graphiques x(t) pour comprendre les racines.




On voit clairement que la voiture rattrape la moto au temps chrono $t = 9{,}3s$ de course. Étant donné que les policiers ont démarré avec un retard de 0,5s, ils ne roulent vraiment que depuis $\Delta t = 9{,}3 - 0{,}5 = 8{,}8s$

A quoi correspond la 1[ère] racine ? Pour la comprendre, faisons un zoom sur les premiers dixièmes de seconde.




La parabole existe, mathématiquement pour tous les temps, mais, physiquement, cette partie de courbe n'existe pas. En effet, durant les 0,5 premières secondes, la voiture est à l'arrêt et donc, il faudrait tracer un segment horizontal en x=0 entre t=0 et t=0,5s. La première racine est donc à rejeter puisqu'à cet instant, le mouvement des policiers n'a pas encore démarré.

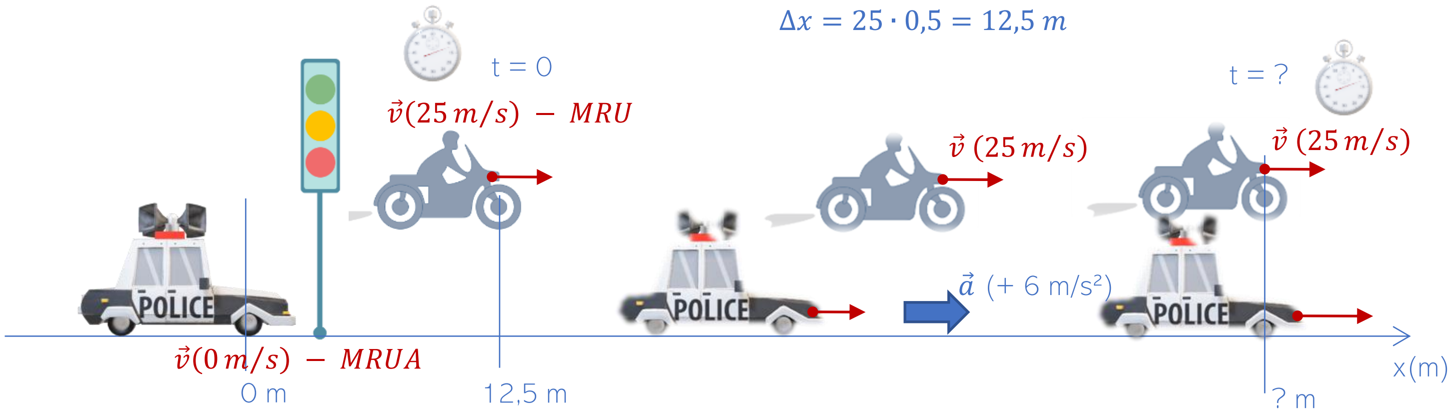
Il nous reste à déterminer la vitesse des policiers et leur position :

$$v_2(t) = 6t - 3 = 6 \cdot 9{,}3 - 3 = 52{,}8\ m/s = 190\ km/h$$

$$x_2(t) = 3 \cdot 9{,}3^2 - 3 \cdot 9{,}3 + 0{,}75 = 232{,}3\ m$$

**2ème méthode** : on enclenche le chrono (t=0) quand le policier démarre. La moto roule déjà depuis 0,5s et elle ne se situe plus au niveau du feu rouge. Elle a roulé à 25m/s en MRU pendant une-demi seconde, elle a donc parcouru une distance égale à :

$$\Delta x = 25 \cdot 0{,}5 = 12{,}5\ m$$




MRU de la moto (n°1) :

$$x_1(t) = 12{,}5 + 25 \cdot t$$

Ecriture des deux équations du mouvement (position x(t) et vitesse v(t)) de la police (n°2) en MRUA.

$$\begin{cases} x_2(t) = x(0) + v(0) \cdot t + \dfrac{at^2}{2} \\ v_2(t) = v(0) + at \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2(t) = 0 + 0t + \frac{6t^2}{2} = 3t^2 \\ v_2(t) = 0 + 6t = \ 6t \end{cases}$$

A instant t, auquel les policiers rattrapent le motard, on peut écrire que $x_1(t) = x_2(t)$ :

$$12{,}5 + 25 \cdot t = 3t^2 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{3t^2 - 25t - 12,5 = 0}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-25)^2 - 4.3.(-12{,}5) = 775$$

$$t_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{25 - \sqrt{775}}{6} = 0{,}47\ s$$

$$t_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{25 + \sqrt{775}}{6} = 8{,}8\ s$$

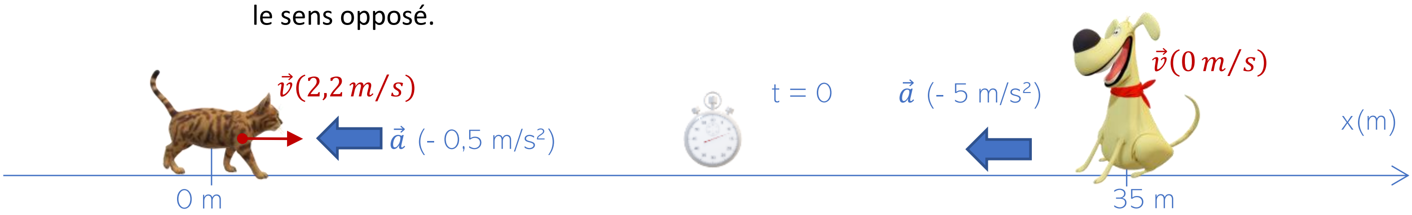
On pourrait croire, qu'on ne trouve pas les mêmes solutions qu'avec la 1ère méthode. Il n'en est rien. En effet, considérons que **la moto grille le feu rouge à 12 :00 :00**. D'après la première résolution, l'horloge indiquerait 12 :00 :9,3 quand les policiers rattraperaient la moto.

Dans ce cas-ci, si la moto grille le feu rouge à 12 :00 :00, on enclenche le chrono 0,5 seconde plus tard, soit à 12 :00 :00,5. Dès lors, quand la police rattrape le motard, 8,8 $s$ plus tard, l'horloge indique 12 :00 :9,3, soit, exactement le même résultat. De façon équivalente, on peut estimer la vitesse et la position des policiers :

$$x_2(t) = 3t^2 = 3 \cdot 8{,}8^2 = 232\ m$$
$$v_2(t) = 6t = \ 6 \cdot 8{,}8 = 52{,}8\ m/s = 190\ km/h$$

27. Un chien aperçoit un chat qui trottine dans sa direction à une vitesse de 8 km/h, alors qu'ils sont à 35m l'un de l'autre. Le chien, fou des chats, accélère dans la direction du chat à un rythme de 5m/s², alors que le chat, inquiet de la situation, réduit timidement son allure à un rythme de -0,5m/s². Le chat a-t-il le temps de s'arrêter (et éventuellement de se sauver dans l'autre sens) avant que le chien ne parvienne à sa hauteur ? Si non, déterminez à quel endroit et après combien de temps le chien est parvenu à hauteur du chat.

Rmq : pour s'entrainer à acquérir tous les bons réflexes (signes des composantes scalaires des vecteurs vitesse et accélération), on mettra le chat dans le sens du référentiel et le chien dans le sens opposé.




Ecriture des deux équations du mouvement (position x(t) et vitesse v(t)) des deux animaux (chat (1) et chien(2)).

Le chat se déplaçant dans le sens du référentiel, il a bien entendu, une vitesse positive. C'est une accélération négative (opposée à la vitesse) qui caractérisera une diminution de la vitesse du chat.

Le chien n'a pas encore de vitesse, mais il se prépare à en acquérir une négative (puisqu'il se déplace dans le sens opposé du référentiel X choisi), de plus en plus forte, ce sera donc également une accélération négative (mais dans le sens de la vitesse, cette fois) qui caractérisera une augmentation de la vitesse du chien.

| CHAT | CHIEN |
|---|---|
| $\begin{cases} x_1(t) = x(0) + v(0)\cdot t + \frac{at^2}{2} \\ v_1(t) = v(0) + at \end{cases}$ | $\begin{cases} x_2(t) = x(0) + v(0)\cdot t + \frac{at^2}{2} \\ v_2(t) = v(0) + at \end{cases}$ |
| $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1(t) = 0 + 2{,}2t - \frac{0{,}5t^2}{2}\ (1) \\ v_1(t) = 2{,}2 - 0{,}5t\ (2) \end{cases}$ | $\Leftrightarrow \begin{cases} x_2(t) = 35 + 0t - \frac{5t^2}{2}\ (3) \\ v_2(t) = 0 - 5t\ (4) \end{cases}$ |

Il suffit donc de calculer après combien de temps la vitesse du chat s'annule :

$$(2) \Rightarrow\ 0 = 2{,}2 - 0{,}5t \quad \Rightarrow\ t = \frac{2{,}2}{0{,}5} = 4{,}4s$$

Où en est le chien à cet instant ?

$$(3) \Rightarrow\ x_2(t) = 35 - \frac{5\cdot 4{,}4^2}{2} = -13\ m$$

$\Rightarrow$ Le chien serait donc 13m en arrière de l'origine de notre référentiel quand le chat s'arrête. Ils se sont donc croisés avant cet instant. Où et quand ça ?

Il y a rencontre entre les deux animaux à un instant $t$ inconnu pour lequel $x_1(t) = x_2(t)$ , ce qu'il suffit d'exprimer :

$$2{,}2t - \frac{0{,}5t^2}{2} = 35 - \frac{5t^2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{2,25t^2 + 2,2t - 35 = 0}$$

On tombe sur une équation du second degré qu'il faut résoudre.

$$\mathbf{2,25t^2 + 2,2t - 35 = 0}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2{,}2)^2 - 4.2{,}25.(-35) = 319{,}84$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

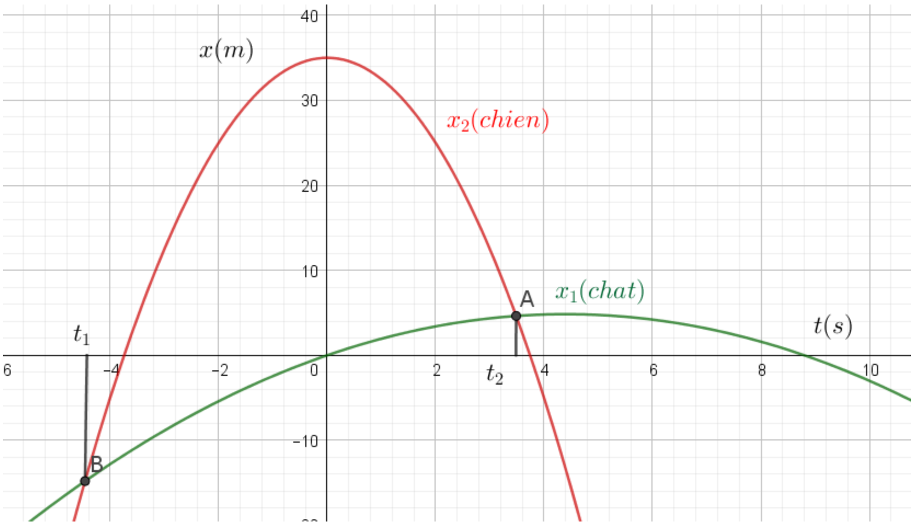
$$t_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2{,}2 - \sqrt{319{,}84}}{4{,}5} = -4{,}46\ s$$

$$t_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2{,}2 + \sqrt{319{,}84}}{4{,}5} = 3{,}49\ s$$

La première racine correspond à un temps négatif qu'il faut, bien évidemment, rejeter. La rencontre des deux animaux a donc lieu après 3,49s. Ils se trouvent alors à la position $x$ donnée par :

$$x_1(t) = 2{,}2 \cdot 3{,}49 - \frac{0{,}5 \cdot 3{,}49^2}{2} = 4{,}6\ m$$

Pour le fun (mais aussi pour la compréhension fine de la matière), si on trace les graphiques x(t) des animaux, on obtient :

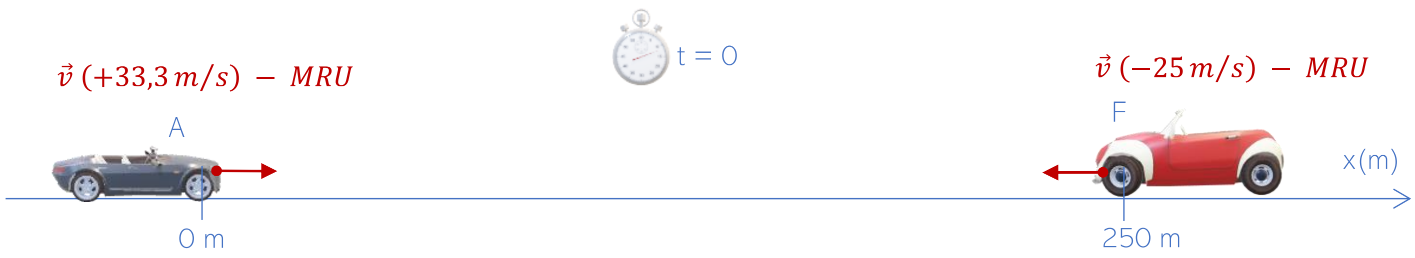



On retrouve bien le sommet (dérivée, donc vitesse nulle) de la parabole décrivant la position du chat en $t = 4{,}4s$.

Les deux paraboles ont une concavité tournée vers le bas ($a < 0$). Celle qui décrit la position du chien possède son sommet en $x(0) = 35m$ , puisque le chien n'a pas encore de vitesse en $t = 0$. Le chat est bien en $x(0) = 0m$ avec une vitesse positive (pente de la tangente, positive non nulle) en $t = 0$. En traçant uniquement l'allure de ces courbes (sans valeur précise), on se rend vite compte que la première racine ($t_1$) correspond en effet à un temps négatif. **En cours d'évaluation, si on a le temps bien entendu, ce genre de petit schéma permet de se rassurer !**

28. Un conducteur A circulant à 120km/h sur l'autoroute, aperçoit un conducteur fantôme F (circulant à contre-sens) roulant à 90km/h, alors qu'il est à 250m de lui. On considère cet instant comme l'origine des temps $t = 0$. Après un temps de réaction de 0,5s ; le conducteur A freine à un rythme de 9m/s². Le conducteur fantôme F s'aperçoit de la situation également, mais, seulement à l'instant t=1s. Il freine alors à raison de 7m/s². La collision est-elle évitable ? Si non, à quelle vitesse a-t-elle lieu ?

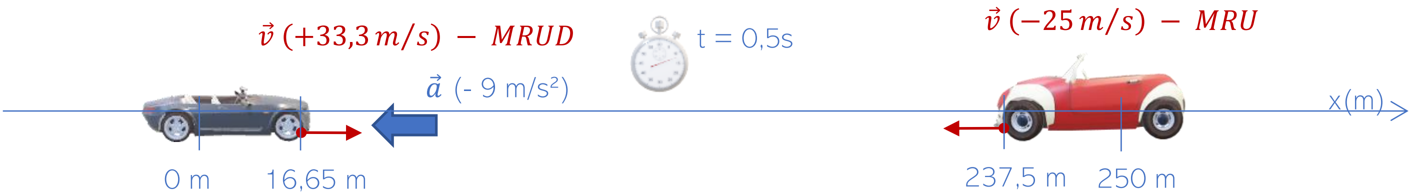
Attention, dans cet énoncé, la complication supplémentaire vient du fait que les deux mobiles (voiture A et voiture fantôme F) roulent à contre-sens. Il faudra donc donner une vitesse positive à l'un et négative à l'autre et faire attention au signe de la composante scalaire du vecteur accélération.




Pendant les 0,5 premières secondes, les deux voitures évoluent donc en MRU et réalisent des déplacements proportionnels à leurs vitesses respectives :

$$\Delta x_A = 33{,}3 \cdot 0{,}5 = 16{,}65\ m \ \Rightarrow x_A(0{,}5) = 16{,}65m$$

$$\Delta x_B = -25 \cdot 0{,}5 = -12{,}5\ m \ \Rightarrow x_B(0{,}5) = 250 - 12{,}5 = 237{,}5m$$

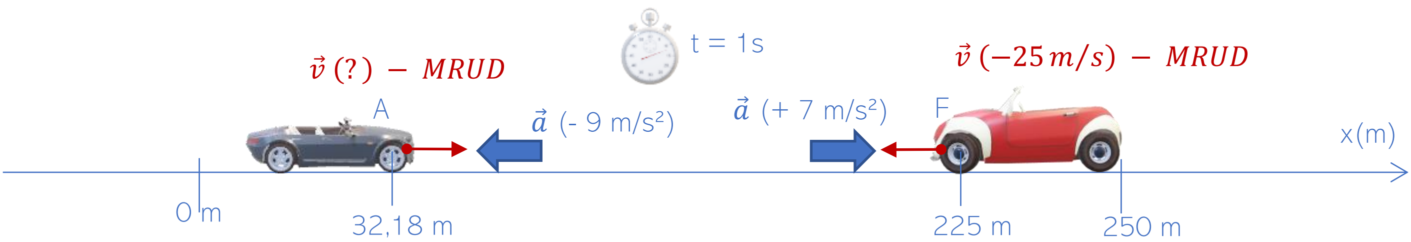



A partir de la situation en $t = 0{,}5s$, la voiture A commence son MRUD de suite, alors que la voiture F roule encore pendant 0,5s en MRU. Evaluons les positions après cette deuxième demi-seconde :

MRUA $$x_A(t) = x_A(0) + v_A(0) \cdot t + \frac{at^2}{2} = 16{,}65 + 33{,}3 \cdot t\ -\ \frac{9t^2}{2} = 16{,}65 + 33{,}3 \cdot 0{,}5\ -\ \frac{9 \cdot 0{,}5^2}{2} = 32{,}18\ m$$

MRU $$x_F(t) = x_F(0) + v_F \cdot t = 237{,}5 - 25 \cdot t\ = 237{,}5 - 25 \cdot 0{,}5\ = 225\ m$$

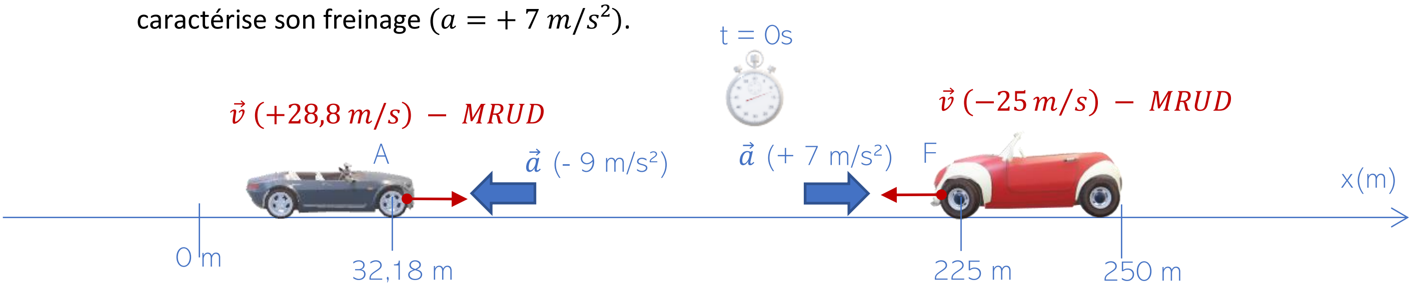
On se retrouve dans cette situation :




Attention, on ne connait plus la vitesse de la voiture A, puisqu'elle a déjà freiné pendant 0,5s ; il faut la recalculer :

$$v_A(t) = 33{,}3 - 9t =\ 33{,}3 - 9 \cdot 0{,}5 = 28{,}8\ m/s$$

A partir de maintenant, les deux voitures foncent l'une vers l'autre en freinant, on peut donc écrire leurs équations de position et de vitesse. **Redémarrons le chrono.** Remarquons encore que, la voiture A a une vitesse positive, c'est donc une accélération négative qui caractérise son freinage $(a = -9\, m/s^2)$. La voiture F, a une vitesse négative, c'est donc une accélération positive qui caractérise son freinage $(a = +7\, m/s^2)$.




VOITURE A

$$\begin{cases} x_A(t) = x(0) + v(0) \cdot t + \dfrac{at^2}{2} \\ v_A(t) = v(0) + at \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A(t) = 32{,}18 + 28{,}8t - \frac{9t^2}{2} \\ v_A(t) = 28{,}8 - 9t \end{cases}$$

VOITURE F

$$\begin{cases} x_F(t) = x(0) + v(0) \cdot t + \dfrac{at^2}{2} \\ v_F(t) = v(0) + at \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_F(t) = 225 - 25t + \frac{7t^2}{2} \\ v_F(t) = -25 + 7t \end{cases}$$

Si la collision est inévitable, c'est qu'il existe un instant t auquel $x_A(t) = x_F(t)$ ; càd un instant t auquel :

$$32{,}18 + 28{,}8t - \frac{9t^2}{2} = 225 - 25t + \frac{7t^2}{2}$$

$\Leftrightarrow$

$$4{,}5t^2 + 3{,}5t^2 - 28{,}8t - 25t - 32{,}18 + 225 = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\mathbf{8t^2 - 53,8t + 193 = 0}$$

Il s'agit encore d'une équation du second degré, cherchons si elle possède des racines :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-53{,}8)^2 - 4.8.(193) = -3282$$

La valeur de $\Delta$ étant négative, il n'y a pas de racine. Ce qui veut dire que $x_A(t)$ n'est jamais égal à $x_B(t)$. Les deux voitures ont donc le temps de s'arrêter avant d'entrer en collision. Cherchons l'endroit et l'instant auquel elles s'arrêtent. Il suffit donc d'exprimer que $v(t) = 0$.

**Pour la voiture A :**

$$v_A(t) = 28{,}8 - 9t = 0 \quad \Rightarrow t = \frac{28{,}8}{9} = 3{,}2\, s$$

La position de la voiture A est alors donnée par :

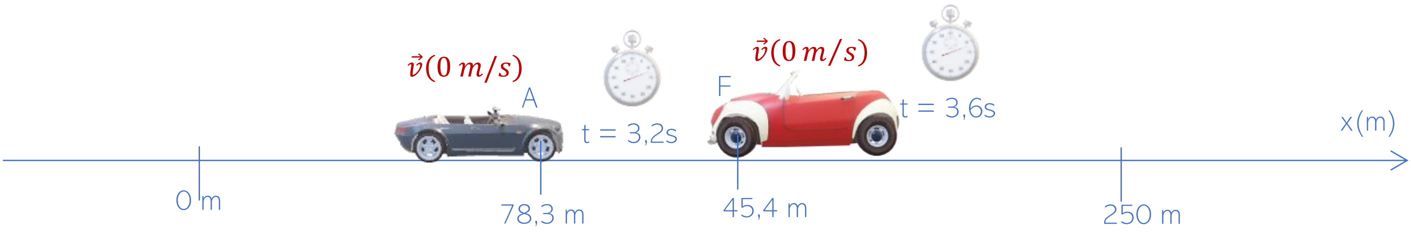
$$x_A(t) = 32{,}18 + 28{,}8t - \frac{9t^2}{2} = 32{,}18 + 28{,}8 \cdot 3{,}2 - \frac{9 \cdot 3{,}2^2}{2} = 78{,}3m$$

**Pour la voiture F :**

$$v_F(t) = -25 + 7t = 0 \quad \Rightarrow t = \frac{25}{7} = 3{,}6\ s$$

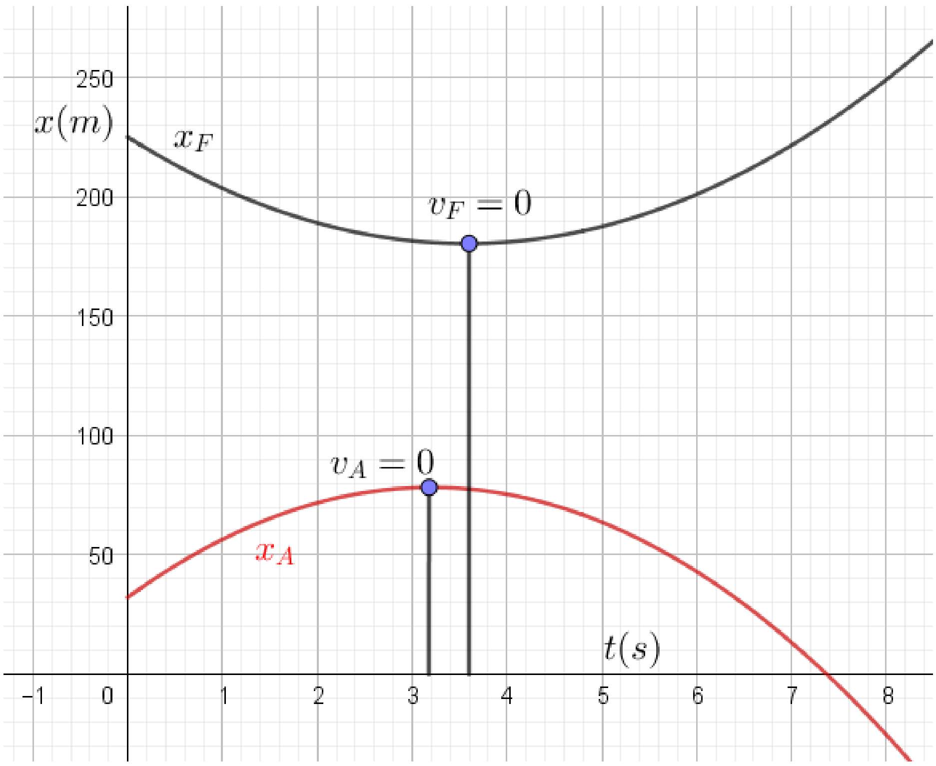
La position de la voiture F est alors donnée par :

$$x_F(t) = 225 - 25t + \frac{7t^2}{2} = 225 - 25 \cdot 3{,}6 + \frac{7 \cdot 3{,}6^2}{2} = 45{,}4m$$



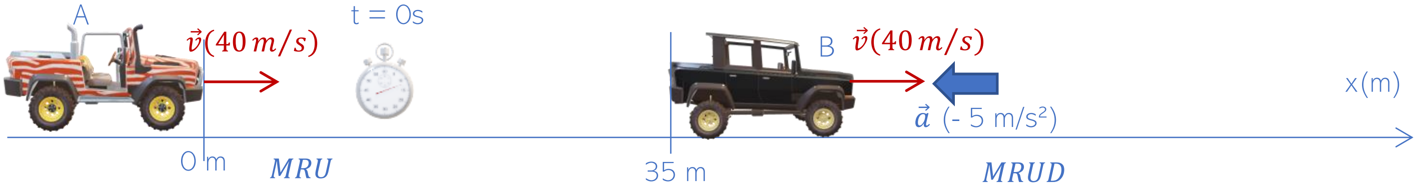

Rmq : pendant 4/10èmes de seconde, la voiture fantôme continue à avancer vers la voiture A qui vient de s'arrêter. Les deux voitures s'arrêtent à $78{,}3 - 45{,}4 = 33m$ l'une de l'autre !

Pour info, voici à quoi ressemblent les deux courbes horaire de la position des voitures :




La partie de la courbe au-delà du sommet est physiquement infondée, bien que mathématiquement, comme on l'a déjà souligné à plusieurs reprises, la parabole soit définie.

29. Sur une autoroute, 2 voitures roulent sur la même file avec une vitesse de 40m/s. Le pare chocs avant A de la seconde voiture est à 35m derrière le pare chocs arrière B de la première voiture. Le véhicule B freine avec une décélération de 5 m/s². Le véhicule A distrait freine 2s plus tard, avec la même décélération. Après combien de temps a lieu la collision ? Quelle est alors la vitesse de chacune des deux voitures ?




On peut donc, et pour deux secondes, seulement, écrire l'équation du MRU du véhicule A et celle du MRUD du véhicule B. Dans ce cas, l'équation $x_A(t)$ caractérise la position du pare-chocs avant de la voiture A, tandis que l'équation $x_B(t)$ caractérise la position du pare-chocs arrière de la voiture B.

MRU de la voiture A :

$$x_A(t) = 0 + 40 \cdot t$$

Ecriture des deux équations du mouvement (position x(t) et vitesse v(t)) de la voiture B en MRUD. Il faut faire diminuer une vitesse positive, il faut donc une accélération négative :

$$\begin{cases} x_B(t) = x(0) + v(0) \cdot t + \dfrac{at^2}{2} \\ v_B(t) = v(0) + at \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_B(t) = 35 + 40t - \frac{5t^2}{2} \\ v_B(t) = 40 - 5t \end{cases}$$

Que se passe-t-il pendant les deux premières secondes ?

- La voiture A avance de 80m avant d'entamer un MRUD : $x_A(t) = 40 \cdot t = 40 \cdot 2 = 80\,m$
- La voiture B avance en freinant et donc, il nous faut évaluer sa position et sa vitesse après 2s :

$$x_B(t) = 35 + 40 \cdot 2 - \frac{5 \cdot 2^2}{2} = 105m$$
$$v_B(t) = 40 - 5t = 40 - 5 \cdot 2 = 30\,m/s$$

A partir de cet instant, étant donné que le type de mouvement de la voiture A change (on passe d'un MRU à un MRUD), il faut redémarrer le chrono et réécrire les équations du mouvement.

VOITURE A

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A(t) = 80 + 40t - \frac{5t^2}{2} \\ v_A(t) = 40 - 5t \end{cases}$$

VOITURE B

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_B(t) = 105 + 30t - \frac{5t^2}{2} \\ v_B(t) = 30 - 5t \end{cases}$$

Si la collision est inévitable, c'est qu'il existe un instant t auquel $x_A(t) = x_B(t)$ ; càd un instant t auquel :

$$80 + 40t - \frac{5t^2}{2} = 105 + 30t - \frac{5t^2}{2}$$

Le fait que les deux voitures possèdent la même accélération, facilite grandement notre résolution, puisque le terme en $t^2$ disparait.

⇔

$$40t - 30t = 105 - 80$$

⇔

$$10t = 25$$

⇔

$$t = \frac{25}{10} = 2{,}5s$$

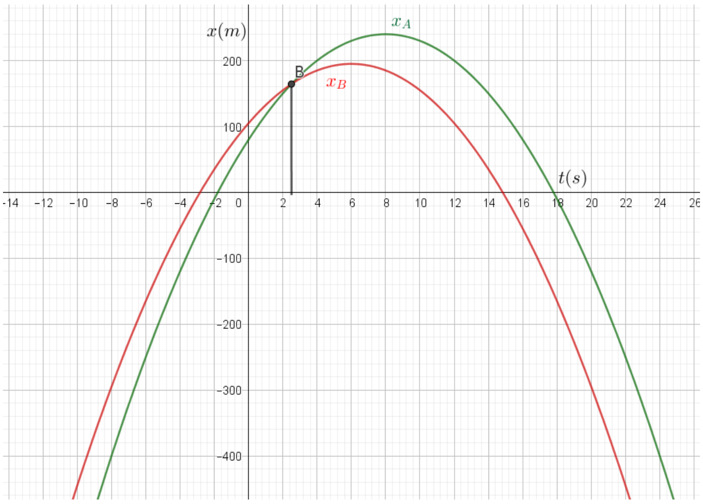
**La collision a donc lieu 4,5 secondes après le début du problème : B freine depuis 4,5s et A, depuis 2,5s seulement. Il nous reste à évaluer leurs vitesses :**

**Pour la voiture A : elle freine pendant 2,5s à partir d'une vitesse de 40m/s :**

$$v_A(t) = 40 - 5t = 40 - 5 \cdot 2{,}5 = 27{,}5\, m/s \;=\; 99\, km/h$$

**Pour la voiture B : elle freine pendant 2,5s à partir d'une vitesse qui ne vaut déjà plus que 30m/s :**

$$v_B(t) = 30 - 5t = 30 - 5 \cdot 2{,}5 = 17{,}5\, m/s \;=\; 63\, km/h$$




On peut se poser la question (pour le fun ou la maitrise) de savoir pourquoi ce problème n'accepte qu'une valeur de $t$. Si on trace les courbes, on comprend que, étant donné que l'accélération est la même, les deux courbes sont des paraboles de même courbure dont l'une est simplement translatée vers la droite et vers le haut par rapport à l'autre. En partant de la courbe rouge et en imaginant une translation vers la droite, puis vers le haut, pour atteindre la parabole verte, on comprend que les deux courbes ne se coupent qu'en un point !